

Rendre les mathématiques accessibles pour tous

Collège

Rendre la démonstration accessible

La démonstration demande la recherche et la mobilisation de ressources cognitives de haut niveau telles que le raisonnement logique et déductif, l'abstraction et la conceptualisation, la planification et l'organisation de la pensée, la métacognition, la mobilisation de connaissances antérieures, la flexibilité mentale.

Dans les étapes de la démonstration, certains éléments ne sont peut-être pas automatisés pour tous les élèves, une double tâche peut alors être un obstacle dans la recherche et la mobilisation de ces ressources : il s'agit donc de soutenir les tâches non automatisées.

De plus, l'acte de démontrer ne peut trouver un intérêt et du sens que si la démonstration est réalisée dans sa globalité. Ainsi l'accomplissement pour certains élèves d'une ou quelques sous-tâches intégrées dans une présentation globale de la démonstration offrira à tous et toutes l'occasion de mener à terme une démonstration dans un cas générique ou dans le cas général.

Ces exigences peuvent faire émerger chez les élèves des besoins de nature diverse et appellent des actions pédagogiques adaptées pour garantir à chacun et chacune une réelle accessibilité de la démonstration.

Ces actions peuvent s'intégrer dans un cadre structurant sur trois niveaux qui permet, d'une part, de mettre en cohérence des pratiques et, d'autre part, de les organiser autour d'une logique d'anticipation fondée sur les besoins partagés.

Ces trois niveaux sont distingués dans le tableau en annexe 1.

- Niveau 1 : besoins partagés (ce qui est pensé pour tous les élèves).
- Niveau 2 : différenciation (plusieurs voies d'accès au même apprentissage).
- Niveau 3 : adaptation (réponses ciblées pour certains élèves).

Illustrations sur deux exemples :

Exemple 1

Démontrer que : $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$; a, b et c sont des entiers avec $c \neq 0$

La démonstration du résultat nécessite ici plusieurs étapes de raisonnement, elle fait appel à des doubles tâches (par exemple isoler une multiplication et appliquer la commutativité).

Afin d'amener tous les élèves à aborder la démonstration dans sa globalité, qui est ici l'objectif cœur de cible, ce document présente, d'une part, des invariants d'une démarche pédagogique et, d'autre part, des exemples de supports et de modalités pédagogiques variés favorisant la mobilisation de ressources cognitives de haut niveau.

[Le document](#) est disponible via [genially.com](#).

Exemple 2

Des difficultés, éprouvées par certains élèves, liées au sens du nombre, aux faits numériques, au calcul, à la lecture et à l'écriture des nombres sont autant d'obstacles au développement du raisonnement, de l'argumentation, des processus de généralisation et d'abstraction.

La pensée algébrique est un domaine des programmes de mathématiques de l'école primaire au collège qui permet de distinguer les difficultés liées à la mobilisation et à l'organisation des connaissances numériques de celles qui relèvent plus spécifiquement du raisonnement. Dans ce cadre, l'étude de patterns donne l'occasion de motiver l'entrée dans des démonstrations afin de valider des conjectures.

Un exemple est proposé **en annexe 3** en suivant la même démarche que dans l'exemple 1.

ANNEXE 1 : un cadre structurant pour rendre la démonstration accessible

Niveau 1 – Anticiper les réponses aux besoins partagés par tous les élèves

Méta besoin	Besoin de sécurisation	Penser une organisation spatio-temporelle favorisant le développement de repères stables. • Annoncer les différentes étapes (lecture, recherche, trace écrite, relecture et check-list) ; prévoir des temps distincts pour chacune d'elles. • Permettre des points d'étape intermédiaires afin que l'élève puisse se situer dans son travail. • Stabiliser les repères visuels en distinguant clairement les données, l'objectif à démontrer, les propriétés mobilisées et la conclusion, à l'aide d'une présentation régulière au tableau ou sur des supports tels que des affichages en classe.
Leviers pour s'engager et persévérer dans la tâche	Besoin de donner du sens aux apprentissages	• Proposer des situations qui appellent la démonstration pour renforcer la perception du besoin/de l'utilité de démontrer. • Proposer une activité d'accroche pour favoriser l'engagement dans la démonstration.
	Besoin de se sentir compétent	• Donner des objectifs intermédiaires. • Valoriser la démarche même si incomplète. • Valoriser les compétences de chacun. • Travailler les phrases conditionnelles avec une gradation de la difficulté. • Faciliter l'accès aux outils, de manipulation par exemple.
	Besoin d'autonomie sociale	• Favoriser la coopération.
Leviers pour des apprentissages explicites, efficaces et transférables	Besoin d'être acteur de ses apprentissages	• Favoriser le travail en groupes.
	Besoin de soutien mnésique	• Proposer des questions / exercices de réactivation, lissage (quiz, cartes de révision, ...). • Structurer les nouvelles connaissances acquises et mémorisées pour mieux les récupérer ultérieurement en mémoire (bien contextualiser explicitement dans une discipline, sous-discipline et type d'activité).
	Besoin d'autonomie cognitive	• Accompagner l'écriture d'une démonstration (avec des fiches outils, exemple en annexe 2). • Comparer différentes démonstrations d'un même résultat, discussion autour de stratégies différentes pour une même preuve. • Présenter des démonstrations sous forme de schémas pour soutenir et organiser le raisonnement. • Utiliser des schémas ou cartes mentales pour organiser les idées. • Inviter les élèves à reformuler les étapes d'une démonstration par le dessin, le schéma avec un code couleur, la narration. • Proposer des canevas de démonstration (ex : hypothèses, étapes, conclusion) en utilisant éventuellement des pictogrammes (à construire avec les élèves).
	Besoin d'automatiser les acquis	• Proposer des temps d'entraînement sur l'utilisation d'un canevas pour l'écriture d'une démonstration. • Permettre à l'élève de s'auto positionner en contrôlant la présence et/ou l'enchaînement des différentes étapes de la démonstration (construire avec les élèves).

Niveau 2 – Anticiper les différenciations nécessaires à l'autonomie des élèves dans les activités

Différenciations sur les contenus	Des élèves peuvent démontrer un résultat sur un cas particulier, un exemple générique.
Différenciations sur les processus	- Décomposer, séquencer les démonstrations en sous-étapes. - Guides pas à pas ; à compléter par exemple à l'aide d'assemblages, de collages de propriétés, d'étapes à remettre dans l'ordre.
Différenciations sur les productions	- Proposer un enregistrement audio pour faciliter la restitution. - Permettre de montrer le raisonnement sous diverses formes, la pluralité des natures des productions de la trace écrite.

Niveau 3 – Anticiper et proposer des adaptations, si nécessaire, en regard des besoins éducatifs particuliers d'un élève

Besoin de sécurisation dans la prise de risque intellectuelle pour s'engager dans les activités	- Valoriser les progrès, les réussites partielles. - Permettre le droit à l'erreur dans le raisonnement. - Être accompagné par un pair dans le raisonnement. - Rassurer l'élève avec l'utilisation de pictogrammes.
Besoin d'accessibilité des supports pour pouvoir réaliser l'activité	- Fournir des supports allégés visuellement avec une présentation adaptée et bien identifiée par l'élève. - Utiliser un vocabulaire non polysémique (données/hypothèses). - Recourir à des pictogrammes pour rendre les supports plus explicites et faciliter le repérage dans les documents de travail.
Besoin de temps supplémentaire et d'allègement de la charge cognitive pour pouvoir atteindre les objectifs	- Réduire/enlever si possible les informations inutiles. - Proposer un canevas de démonstration pré rempli, semi guidé.
Besoin d'étaiyage dans la planification pour être autonome dans les tâches	- Faire identifier explicitement la première étape à engager. - Proposer un guidage par questions successives. - Mettre en évidence visuellement les étapes. - Donner des objectifs intermédiaires. - Utiliser des pictogrammes pour visualiser les étapes de la démonstration.
Besoin de soutien dans la tâche pour conscientiser les procédures	- Permettre l'utilisation de l'outil numérique comme appui dans la compréhension et l'organisation de la démarche. - Permettre le tutorat pour offrir un accompagnement intermédiaire et favoriser la verbalisation du raisonnement.
Besoin d'un cadre structuré pour apprendre à gérer ses émotions et ses réactions comportementales	- Prévoir des temps courts de pause cognitive ou de recentrage. - Proposer des aides intermédiaires avant le blocage complet. - Mobiliser un support numérique permettant de soutenir l'engagement et de limiter la charge émotionnelle liée à l'erreur.
Besoin de soutien et d'allègement au niveau psychomoteur (écriture) pour faciliter l'accès aux contenus d'apprentissages	- Réduire le coût de l'écriture manuscrite : alterner avec des productions orales ; accepter une production simplifiée. - Permettre l'appui d'un camarade référent pour les notes.

ANNEXE 2 : un exemple de fiche outil

Accompagner l'écriture d'une démonstration

Procéder par étapes

Lecture de l'énoncé :

- ☐ J'ai lu l'énoncé attentivement.
- ☐ J'ai repéré ce que je cherche.

Repérage des données utiles :

- ☐ J'ai relevé les données importantes.

Je cherche un lien logique :

- ☐ J'ai choisi une propriété / un théorème.
- ☐ Je vérifie que je peux l'utiliser (toutes les conditions pour l'utiliser sont – elles vérifiées ?).

Je construis le raisonnement :

- ☐ J'enchaîne les étapes dans l'ordre.
- ☐ Chaque étape est justifiée.

Je rédige correctement :

- ☐ J'utilise des mots de liaison.
- ☐ Mes phrases sont complètes.
- ☐ Mon raisonnement est clair.

Je conclus :

- ☐ J'ai répondu à la question.

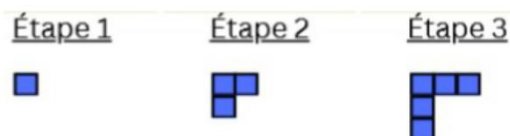
Check list finale

- ☐ Je n'ai pas utilisé le résultat à démontrer au début.
- ☐ Chaque étape est justifiée.
- ☐ Les étapes sont dans le bon ordre.
- ☐ Ma conclusion répond bien à la question.

ANNEXE 3 : un exemple sur les patterns (cycle 4)

Énoncé de l'activité proposée aux élèves

Les motifs d'un pattern évolutif sont représentés ci-dessous jusqu'à l'étape 3.



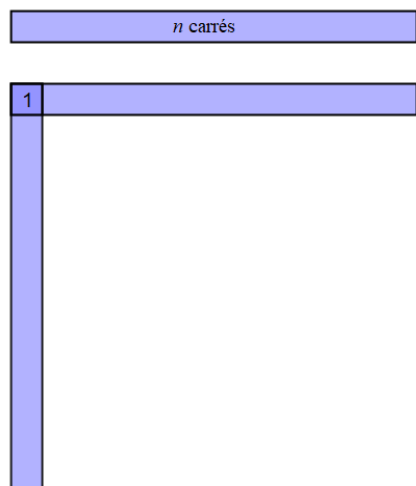
1. Représenter le motif à l'étape 4. De combien de carrés est-il composé ?
2. De combien de carrés sera composé le motif à l'étape 31 ? Justifier la réponse.
3.
 - a. Expliquer comment trouver le nombre de carrés à n'importe quelle étape.
 - b. n est un entier naturel différent de 0. Proposer une formule donnant le nombre de carrés du motif à l'étape n .

Ecrire une démonstration du résultat relatif à la question 3.

On cherche le nombre de carrés qui composent le motif à l'étape n et donc à répondre à la question 3.b.

Dans chaque exemple de démonstration, une illustration est donnée à l'aide d'un schéma afin de mettre en évidence la structure du motif et de donner du sens à chaque terme de la formule.

Démonstration 1



On décompose le motif en ligne et en colonne.

À l'étape n .

La ligne comporte n carrés.

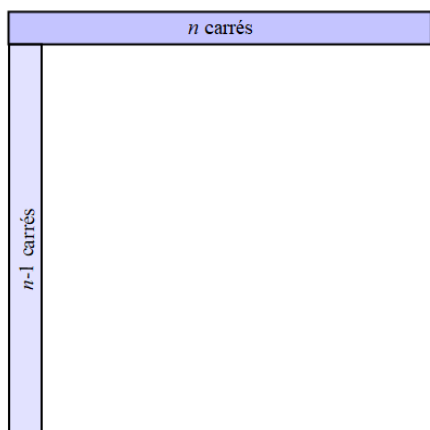
La colonne comporte n carrés.

La somme $n + n$ ne donne pas le nombre de carrés du motif car le carré situé à l'angle appartient à la fois à la ligne et à la colonne, il serait alors compté deux fois.

Le nombre de carrés cherché est donc

$n + n - 1$ soit encore $2n - 1$.

Démonstration 2

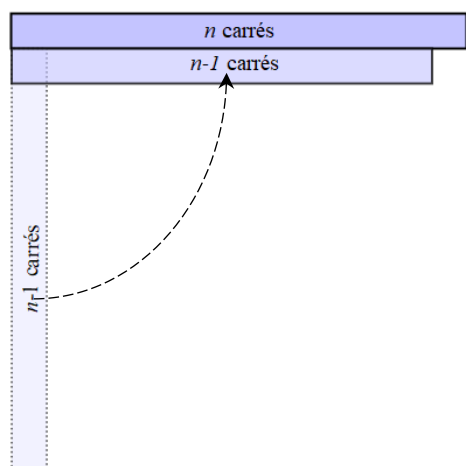


On décompose le motif en n carrés en ligne et $n - 1$ carrés en colonne.

Le nombre de carrés cherché est donc

$$n + n - 1 \text{ soit encore } 2n - 1$$

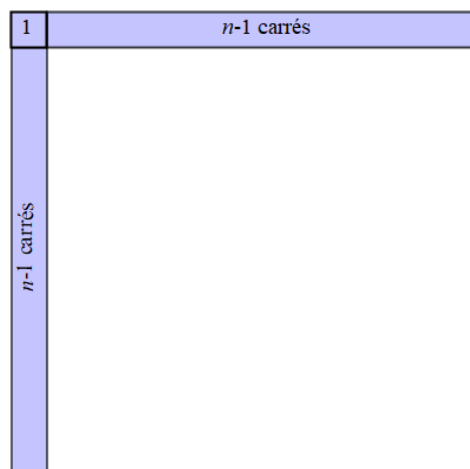
Démonstration 3



En redisant les carrés autrement, le nombre de carrés cherché est égal à la somme du nombre de carrés sur les deux lignes.

Le nombre de carrés cherché est donc $n + n - 1$ soit encore $2n - 1$.

Démonstration 4



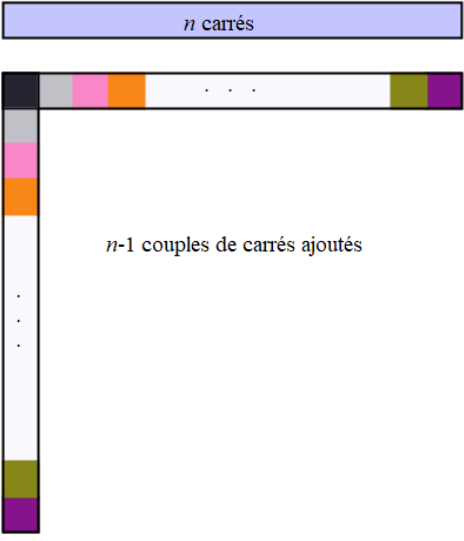
On décompose le motif en trois blocs :

deux blocs de $n - 1$ carrés et un bloc d'un carré.

Le nombre de carrés cherché est :

$$2(n - 1) + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1.$$

Démonstration 5 : raisonner par couple

	Pour passer du motif d'une étape à l'autre on ajoute 2 carrés. À l'étape n on a ajouté $n - 1$ couples de carrés au seul carré du motif de l'étape 1. On a donc ajouté $2(n - 1)$ carrés. Le nombre de carrés cherché est : $1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$
---	--

Repérer les obstacles

Difficultés identifiées	Besoins	Actions
- Obstacle perceptif : - Comptage un à un dépendant du dessin. - Stratégie inefficace pour de grandes figures. - Objectif de généralisation non compris. - Faible engagement dans la tâche.	Besoin d'explicitation Besoin de verbalisation	Développer la capacité à observer les figures. Faire verbaliser les régularités.
Raisonnement itératif : Ajout de 2 carrés sans projection dans une généralisation (passage à l'abstraction) Blocage pour une étape éloignée.	Besoin d'explicitation	Décomposer une figure complexe.
Difficulté de généralisation Statut du numéro de l'étape mal compris : - Le rang est vu comme un simple numéro d'ordre sans rôle fonctionnel. - Absence de lien rang / nombre de carrés. Incapacité à produire une règle valable pour toute figure de rang n.	Besoin d'étayage Besoin de guidage vers une stratégie explicite de résolution	Segmenter les consignes. Faire verbaliser les stratégies de calcul.

Difficultés identifiées	Besoins	Actions
Absence de contrôle de la vraisemblance Résultat non testé sur les premières figures. Erreurs non détectées. Formule erronée ou absente.	Besoin d'un travail sur l'erreur	Valoriser les réussites. Questionner l'élève sur sa démarche pour qu'il puisse penser à tester son résultat sur les premières étapes.
Structure du pattern non identifiée : - La figure est perçue comme un tout sans décomposition des parties variables et des parties invariantes. - Manque de flexibilité, d'inhibition	Besoin de repère visuel concret	Manipuler.
Blocage face à la variable Changement de registre - Difficulté à passer du dessin à la formule - Refus ou évitement de la lettre n. (Symbolisme) - Généralisation inachevée. Erreur de modélisation	Besoin de verbalisation Besoin d'explicitation	Accompagner l'introduction de la lettre comme variable par le langage naturel puis symbolique. Proposer des activités de traduction entre registres : dessin / expression littérale / formule. Accompagner dans l'explicitation de la démarche.

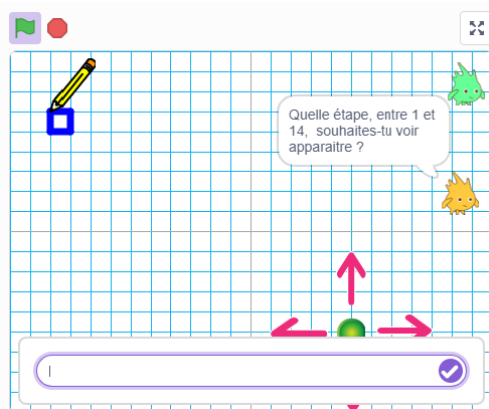
Définir les prérequis et concevoir des lissages.

Les prérequis

- Identifier des régularités et poursuivre une suite évolutive de motifs.
- Identifier la structure d'un motif évolutif en repérant une régularité.
- Produire des formules.
- Démontrer une propriété générale en mobilisant le calcul littéral.
- Savoir manipuler des expressions littérales.

Des exemples de lissages

Fichier scratch : [Quelle étape.sb3](#)

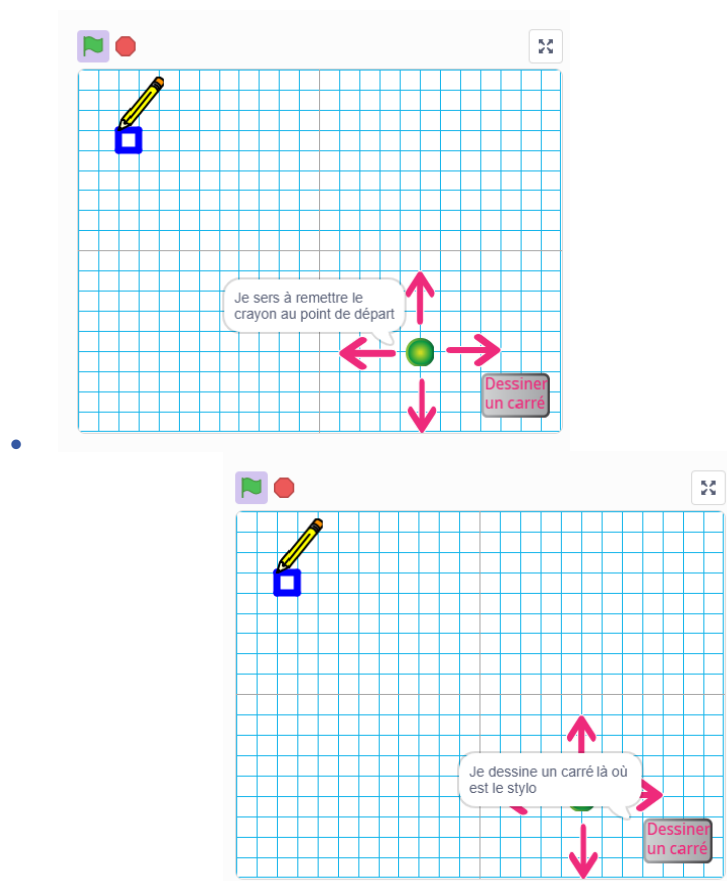


Objectifs

- Développer la capacité à observer les figures.
- Décomposer une figure complexe.
- Segmenter les consignes.

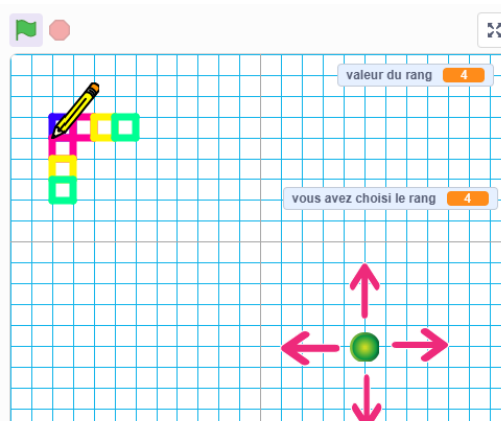
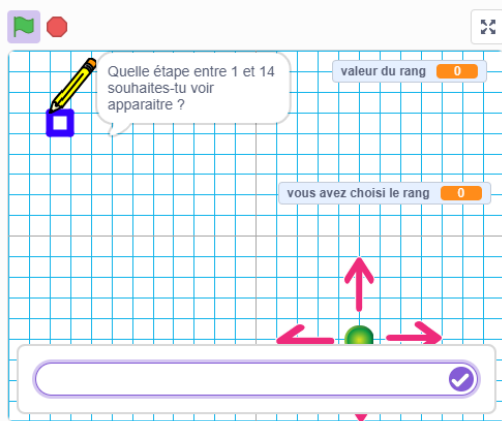
Fichier scratch : [Tracer par les élèves.sb3](#)

Objectif : valoriser les réussites par la manipulation.



Stratégie d'ajout de 2 carrés d'une étape à l'autre par la manipulation.

À l'aide du fichier scratch : [Tracer par 2.sb3](#)



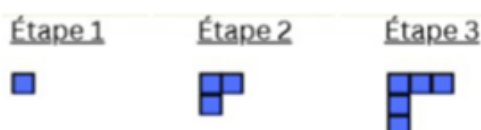
À l'aide de briques de construction :

Remarque

Le fait d'avoir des couples de même couleur n'est pas obligatoire mais sert à visualiser l'ajout de 2 carrés à chaque étape.

Raisonner et justifier son raisonnement

Les motifs d'un pattern évolutif sont représentés jusqu'à l'étape 3.



Répondre par Vrai ou Faux :

- Il y a 3 carrés au total à l'étape 2
- Il y a 4 carrés en ligne à l'étape 5
- Je dois ajouter 2 carrés pour passer de l'étape 6 à l'étape 7
- On compte 18 carrés à l'étape 9.

Justifier les réponses des questions b, c et d.

Motiver pour la démonstration : une question d'accroche.

Les motifs d'un pattern évolutif sont représentés jusqu'à l'étape 3.



Entourer les bonnes réponses :

Le calcul que Sam doit faire pour trouver le nombre de carrés à l'étape 7 est :

- ☐ a) 7×2 ☐ b) $7 \times 2 - 1$ ☐ c) $7 + (7 - 1)$

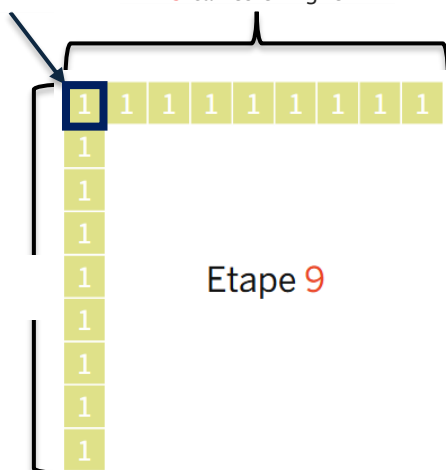
Prévoir une monstration.

Pour dénombrer le nombre de carrés à l'étape 9.

En observant la décomposition du motif à l'étape 9.

1 carré compté 2 fois

9 carrés en ligne



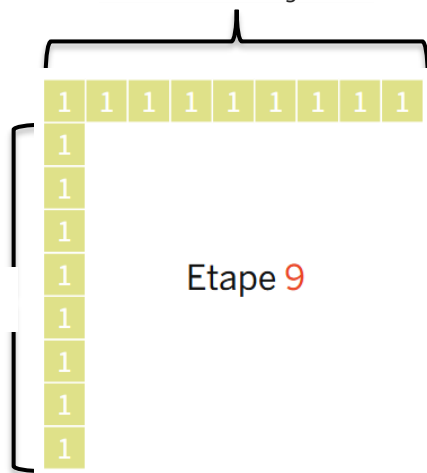
En observant le motif :

$$9+9-1 = 2 \times 9 - 1 = 17$$

Etape 9

9 carrés en colonne

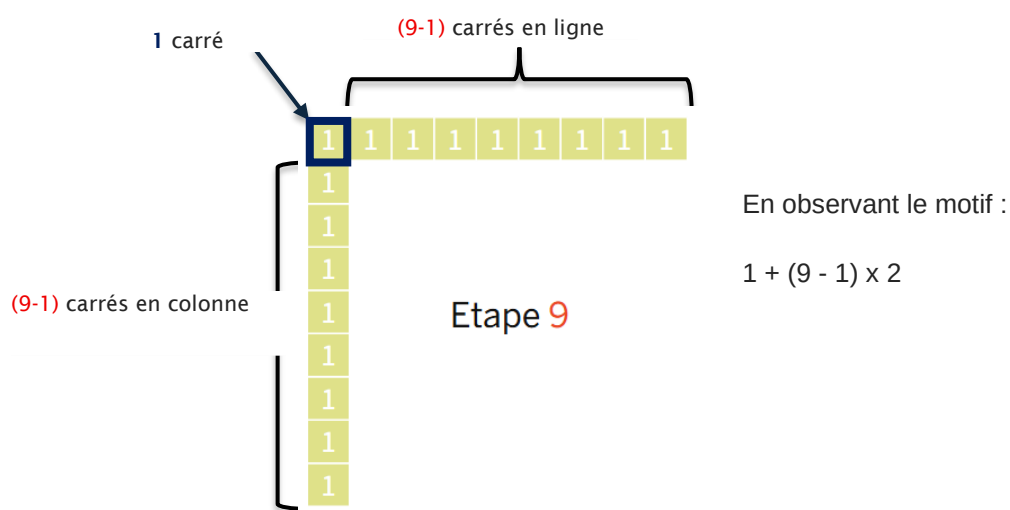
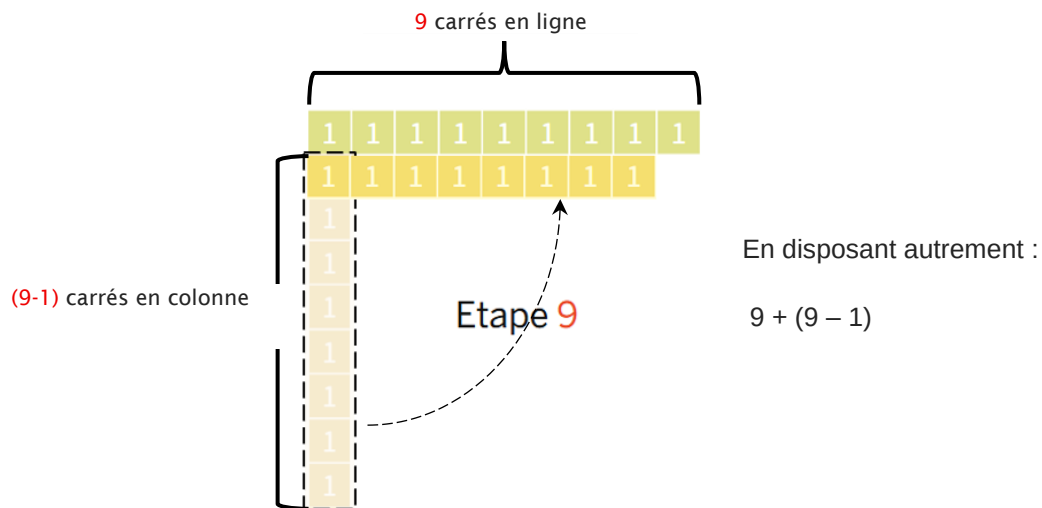
9 carrés en ligne



En observant le motif : $9 + (9 - 1)$

Etape 9

(9-1) carrés en colonne



En analysant l'évolution des motifs : 2 carrés sont ajoutés pour passer d'un motif au suivant.



À chaque étape on ajoute un couple de carrés de la même couleur, soit (9-1) couples à l'étape 9

$$1 + (9 - 1) \times 2$$

Concevoir une trace écrite.

En choisissant une des démonstrations illustrées dans le point 1 et en valorisant la verbalisation.