



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Livret d'accompagnement de programme

Mathématiques

Avant
4 ans

À partir de
4 ans

À partir de
5 ans

CP

CE1

CE2

CM1

CM2

6^e

5^e

4^e

3^e

2026



Ce livret d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 3, publié au [BOENJS du 17 avril 2025](#) propose des ressources organisées sous la forme de fiches thématiques. Chaque fiche présente une séquence de classe, dans laquelle une ou plusieurs séances sont détaillées. Les exemples proposés abordent certaines priorités ou nouveautés des programmes scolaires.

■ Table des matières

3	Enjeux pédagogiques du cycle 3
4	Recommandations pédagogiques et gestes professionnels associés
6	Proposition de séquence n° 1 – Multiplier un nombre entier par 5

Cette séquence vise à automatiser la multiplication par 5 d'un nombre entier inférieur à 200, en s'appuyant sur des prérequis essentiels tels que la multiplication par 10 et le calcul de la moitié d'un nombre pair. Elle s'inscrit dans une progression structurée du CE1 à la 6^e, où chaque niveau renforce des compétences spécifiques pour construire un répertoire de procédures efficaces. Les enjeux pédagogiques sont multiples : réduire la charge cognitive des élèves, renforcer leur confiance en mathématiques, et développer leur capacité à choisir des stratégies adaptées selon le contexte. L'automatisation des procédures, validée par des recherches en didactique, permet de libérer la mémoire de travail et d'améliorer la rapidité et la précision des calculs.

17	Proposition de séquence n° 2 – Initiation au raisonnement algébrique
----	--

Cette séquence vise à introduire les élèves au raisonnement algébrique en les initiant à la recherche de la valeur d'un nombre inconnu, représenté par un symbole ou une lettre. L'enjeu principal est de faire évoluer les élèves de l'arithmétique vers l'algèbre, en passant d'une logique de calcul numérique à une manipulation symbolique. Ce changement de perspective permet de développer la capacité à identifier des régularités, des relations et des généralisations, préparant ainsi à la formalisation algébrique. La démarche pédagogique repose sur une approche concrète et progressive : utilisation de matériel tangible (cartes, enveloppes, balance à plateaux) pour modéliser des situations d'égalité, puis transition vers des représentations. Les élèves apprennent à verbaliser leurs raisonnements et à distinguer les situations qui relèvent du champ additif de celles qui relèvent du champ multiplicatif.

29	Proposition de séquence n° 3 – Enseigner les probabilités
----	---

Cette séquence vise à initier les élèves à la notion de probabilités, en les familiarisant avec les expériences aléatoires et en leur permettant de catégoriser des événements (certains, impossibles, probables, peu probables, ou « une chance sur deux »). Elle s'inscrit dans une progression du CM1 à la 6^e, où les élèves apprennent à identifier les issues possibles, comparer des probabilités et découvrent l'équiprobabilité.

La séquence encourage une approche concrète à travers des expériences simples (lancers de dés, tirages au sort), permettant aux élèves de confronter leurs intuitions à la réalité mathématique. Elle vise à lever les croyances erronées et à construire une compréhension claire des mécanismes probabilistes.

Enjeux pédagogiques du cycle 3

Dans la continuité des cycles précédents, au cycle 3, les élèves doivent acquérir de solides bases sur les nombres, qu'ils soient entiers ou non, en comprenant leurs différentes écritures (écritures décimales ou sous forme de fractions) et en développant des savoir-faire pour pouvoir effectuer des calculs mentalement ou par écrit selon les nombres en jeu.

L'enseignement des mathématiques au cycle 3 vise également le renforcement de compétences d'analyse, de raisonnement, de logique et d'argumentation à travers la résolution de problèmes qui est au cœur de l'activité mathématique et fait l'objet d'un enseignement structuré et progressif.

Pour être en capacité de résoudre des problèmes, les élèves doivent pouvoir disposer d'automatismes, c'est-à-dire d'un corpus de connaissances, de procédures et de stratégies immédiatement disponibles. La maîtrise de ces automatismes allège la mémoire de travail des élèves lors de la résolution de problèmes, leur permettant de se consacrer pleinement à des tâches cognitives de niveau supérieur comme la prise d'initiatives, la créativité ou le raisonnement. L'apprentissage de ces automatismes est particulièrement valorisant car il produit souvent des progrès rapides, ce qui engage les élèves dans un cercle vertueux et renforce leur confiance en leur capacité à réussir.

Il est essentiel de trouver un juste équilibre entre le travail sur l'acquisition des techniques, en particulier via les automatismes, et l'ancrage des connaissances en lien avec le sens des notions mathématiques et leur utilisation lors de la résolution de problèmes.

De nouveaux éléments apparaissent dans le programme de mathématiques du cycle 3 comme l'algèbre, les probabilités ou l'initiation à la pensée informatique. Il est essentiel que ces champs soient abordés sans attendre la fin de l'année scolaire afin de permettre aux élèves d'acquérir de solides bases sur ces domaines dont l'étude se poursuivra tout au long du cycle 4 en s'appuyant sur les acquis du cycle 3. L'introduction précoce doit permettre une centration forte sur le sens plutôt que sur des compétences techniques et calculatoires. Ces nouveaux champs d'étude ne remplacent bien évidemment pas les domaines plus traditionnels : nombres, calcul, résolution de problèmes, géométrie ou grandeurs et mesures qui restent le cœur du programme de cycle 3.

La première séquence de ce document permet d'illustrer une partie du travail attendu pour renforcer les automatismes en calcul mental et tout particulièrement la maîtrise de procédures de calcul mental bien identifiées à travers un enseignement structuré et explicite d'une procédure relevant du programme de CM1. La deuxième séquence permet d'illustrer le travail attendu dans une séquence sur la thématique de l'algèbre au CM1. On y retrouve des problèmes qui étaient régulièrement proposés aux élèves de CM1, mais qui sont proposés ici dans le cadre d'une séquence d'enseignement permettant de structurer les apprentissages afin de pouvoir proposer des problèmes de plus en plus complexes tout en maintenant les élèves en réussite. La troisième séquence porte sur le domaine des probabilités, nouvellement introduit au cours moyen. Elle permet d'illustrer précisément les attentes d'un enseignement centré sur le sens et la comparaison d'événements en fonction de leur probabilité sans avoir recours à la quantification des probabilités et donc à des calculs techniques.

Recommandations pédagogiques et gestes professionnels associés

Une démarche d'enseignement structuré et progressif

Les recherches en sciences cognitives montrent que pour apprendre efficacement, les élèves doivent comprendre ce qui est attendu d'eux, identifier les obstacles cognitifs susceptibles de freiner leur progression, et disposer de stratégies adaptées pour les surmonter. Le professeur joue alors un rôle clé en guidant les élèves, en structurant les savoirs, et en leur fournissant des outils concrets pour réussir. Toutefois, si cette démarche peut s'avérer particulièrement efficace, elle ne peut être mobilisée de manière systématique, quels que soient le contenu ou la situation d'enseignement. Son efficacité repose donc sur une mise en œuvre réfléchie, attentive aux spécificités de chaque situation d'apprentissage, des contenus enseignés et des profils d'élèves. Pour que cette approche produise pleinement ses effets, elle doit s'appuyer sur une capacité du professeur à ajuster ses interventions et à différencier ses pratiques. C'est en conjuguant les apports des sciences cognitives avec une fine compréhension des besoins des élèves et une approche pédagogique souple et réactive que l'on crée les conditions d'un apprentissage à la fois efficace et durable.

Ainsi un projet d'enseignement efficace s'appuie sur une démarche progressive permettant d'accompagner l'apprentissage des élèves.

Tout d'abord, il s'agit de s'assurer que les objectifs sont compris des élèves, et que la situation présentée est suffisamment motivante pour leur permettre d'entrer dans l'apprentissage. Par la suite, les activités proposées aux élèves, conçues pour atteindre les objectifs fixés, peuvent dans leur mise en œuvre alterner des phases accompagnées par l'enseignant et d'autres en autonomie. Ces activités se concluent par un temps de structuration des apprentissages « Qu'ai-je appris ? » et de retour réflexif « Qu'ai-je réussi ? Que puis-je faire mieux et comment ? ».

À l'occasion des séances ou séquences suivantes, les acquis sont remobilisés afin de favoriser l'automatisation et la capacité des élèves à transférer les apprentissages, dans d'autres situations.

La place de l'erreur

Lorsque la réponse de l'élève est inexacte, il est essentiel de l'accompagner dans l'identification de son erreur afin qu'il puisse, par exemple, comprendre le principe mathématique en jeu ou améliorer son raisonnement logique. Le professeur favorise, encourage et accompagne la réflexion de l'élève en lui proposant des rétroactions régulières sur son activité, dans le but de le guider progressivement vers une meilleure compréhension de ses démarches.

La place et le rôle de la verbalisation par l'élève

Le professeur encourage et favorise la verbalisation et l'explication des objets d'apprentissage afin d'en assurer une meilleure compréhension et de développer ainsi la capacité à en reconnaître les régularités. Il peut, par exemple, demander aux élèves de décrire ce qu'ils observent et de justifier leurs réponses.

Le suivi et l'évaluation des progrès des élèves

Suivre régulièrement la progression des élèves dans la compréhension des notions et dans le développement des compétences, non seulement par l'observation directe mais aussi par l'utilisation d'outils d'évaluation, permet d'ajuster les activités en fonction des acquis des élèves, en tenant compte de leurs progrès et de leurs difficultés.

Proposition de séquence n° 1 – Multiplier un nombre entier par 5

Objectif

Multiplier par 5 un nombre entier inférieur à 200.

Éléments de progression

Des procédures de calcul mental sont explicitement enseignées depuis le CP et sont régulièrement sollicitées ensuite de manière à asseoir leur automatisation. Cette automatisation est indispensable pour donner confiance aux élèves, soulager leur mémoire de travail dans des tâches plus complexes, et pour permettre l'acquisition de nouvelles procédures : par exemple, pour cette séquence, la maîtrise d'une procédure de multiplication par 10 et d'une procédure de calcul de la moitié d'un nombre pair sont des prérequis pour apprendre à multiplier un nombre entier par 5. De manière conjointe, ce nouvel apprentissage sera l'occasion de renforcer la maîtrise de ces deux procédures élémentaires. Cette séquence est aussi une opportunité pour consolider la maîtrise d'autres procédures déjà apprises.

Il est essentiel de penser le calcul mental en séquences aux objectifs clairement identifiés, en termes de renforcement de procédures précédemment apprises et de découverte de nouvelles procédures, et non en séances ponctuelles et isolées. Pour cela, il est souhaitable de suivre une progression clairement définie et planifiée au sein de l'école avec un partage des verbalisations et des traces utilisées pour les procédures enseignées.

Niveau	Référence au programme et progressivité
CE1	• Déterminer la moitié d'un nombre pair. • Multiplier par 10 un nombre inférieur à 100. • Comprendre et savoir que la multiplication est commutative.
CE2	• Multiplier un nombre entier par 10. • Multiplier un nombre inférieur à 10 par un nombre entier de dizaines.
CM1	• Multiplier un nombre entier inférieur à 10 par un nombre entier de dizaines ou de centaines. • Multiplier un nombre décimal par 10. • Multiplier par 5 un nombre entier inférieur à 200.
CM2	• Multiplier un nombre décimal par 5. • Multiplier un nombre décimal par 50.
6 ^e	Au cours moyen, les automatismes concernent principalement les faits numériques et les procédures de calcul que tout élève est tenu de maîtriser. En 6^e, les automatismes couvrent l'ensemble des domaines du programme, mais portent uniquement sur des connaissances, des procédures et des stratégies déjà étudiées au cours moyen.

Enjeux pédagogiques

Au-delà d'outiller les élèves pour leur vie quotidienne, le calcul mental joue un rôle majeur en résolution de problème et contribue à renforcer l'acquisition d'autres notions et concepts mathématiques (numération, proportionnalité, algèbre, ...). Il joue aussi un rôle majeur en résolution de problèmes.

De la même manière qu'en résolution de problèmes où un des objectifs est de construire une bibliothèque de situations déjà résolues, en calcul mental il s'agit de constituer un répertoire de faits numériques et de procédures, qui s'automatisent progressivement en vue de soulager la mémoire de travail.

Ces procédures de calcul mental visent à réduire le risque d'erreur et à faciliter la production rapide de résultats.

Lorsque des contraintes temporelles sont proposées, les élèves sont encouragés à abandonner certaines de leurs procédures au profit de procédures efficaces. En effet, si l'apprentissage de procédures en calcul mental est nécessaire, elles doivent ensuite être mobilisées à bon escient, au regard d'un contexte. La capacité d'un élève à choisir la procédure la plus efficace relève de la stratégie (cf. **séance n° 4**).

Par exemple, la procédure enseignée dans cette séquence ne serait pas efficace pour effectuer le produit 5×100 . En effet, appliquer la procédure apprise pour multiplier un nombre par 100 est plus rapide que de multiplier 100 par 10 et de diviser le résultat par 2.

Au-delà d'outiller les élèves pour leur vie quotidienne, le calcul mental contribue à renforcer l'acquisition d'autres notions et concepts mathématiques (numération, proportionnalité, algèbre, ...). Il joue aussi un rôle majeur en résolution de problèmes.

Très vite, enseignants et élèves peuvent mesurer avec un peu d'entraînement les progrès accomplis par l'agilité gagnée en calcul mental. En étant placés en situation de réussite tout au long de la séquence, les élèves développent leur plaisir à faire des mathématiques, ce qui peut être un levier pour la réussite et l'engagement de tous les élèves, notamment celui des filles.

Éclairage de la recherche

Le calcul mental peut être très lourd pour la mémoire de travail des élèves. C'est pourquoi il est indispensable pour alléger cette charge d'automatiser tant des faits numériques que des procédures. Les travaux de Jérôme Prado et de Catherine Thévenot insistent sur l'importance de cette automatisation, car plus une procédure est complexe ou peu automatisée, plus elle mobilise la mémoire de travail, ce qui ralentit ou rend plus difficile d'autres tâches (cf. prérequis). Automatisation et compréhension ne sont pas antinomiques : comprendre les procédures, savoir les expliciter, les comparer permet aux élèves de choisir parmi plusieurs procédures celle qui sera la plus efficace.

De ces travaux, plusieurs grands principes peuvent être dégagés, notamment l'importance d'un entraînement régulier, fréquent et structuré qui propose des tâches de production plutôt que de lecture. Ainsi, le recours aux flashcards via les boîtes de Leitner est pointé comme efficace.¹

¹ Éduscol, [Les automatismes au collège](#)

Démarche d'enseignement

Prérequis

Les élèves ont besoin des procédures apprises pour multiplier un entier par 10 et pour déterminer la moitié d'un nombre pair. Ils savent que, lors d'une multiplication par 10, une unité devient une dizaine et une dizaine devient une centaine. Ainsi, chaque chiffre du nombre initial prend une valeur 10 fois plus grande : le chiffre des unités devient le chiffre des dizaines et le chiffre des dizaines devient le chiffre des centaines. Ce prérequis est indispensable à la conduite de cette séquence.

Lorsque le calcul de la moitié ne relève pas d'un fait numérique, le calcul peut passer par la décomposition de ce nombre que l'on peut formuler ainsi :

pour déterminer la moitié de 54, on peut ajouter la moitié de 50 et la moitié de 4.

Là encore, ce prérequis est indispensable.

Les prérequis pourront être remobilisés au cours des jours qui précèdent la première séance afin de réactiver les procédures déjà apprises. En fonction des réussites des élèves, des séances décrochées dédiées à la multiplication d'un nombre entier par 10 et/ou la recherche de la moitié peuvent être proposées. Le recours à la manipulation et/ou à la représentation peut se justifier. Certains outils, comme le glisse-nombre pour multiplier par 10 ou le matériel de manipulation en base 10 pour déterminer la moitié, peuvent être pertinents.

La démarche qui est présentée ici est transférable à d'autres procédures.

Il s'agit dans un premier temps de faire émerger le besoin d'apprendre une nouvelle procédure. Certains élèves parviennent parfois à des résultats justes mais en passant par des procédures peu efficaces car trop lentes (par exemple en posant l'opération dans leur tête). L'une des caractéristiques d'une procédure efficiente est la rapidité d'exécution qu'elle permet.

La procédure visée peut être proposée par des élèves qui la verbaliseront face à la classe mais si aucun élève n'en dispose c'est l'enseignant qui l'introduira.

Une fois la procédure explicitée et justifiée, l'enseignant accompagne les élèves vers l'acquisition de cette dernière. Pour les calculs proposés, il verbalisera chacune des étapes.

La production d'une trace écrite à ce stade est indispensable.

Par la suite, des séances sont organisées pour permettre aux élèves d'utiliser la procédure de manière progressive et autonome, suivies d'exercices de réinvestissement et d'automatisation. L'apprentissage du calcul mental s'inscrit dans une démarche sur le long terme : les élèves explorent, découvrent, s'approprient les méthodes, s'entraînent, mémorisent et finissent par maîtriser pleinement ces compétences. Cela implique une alternance entre des séances courtes et des séances plus approfondies.

L'appui de l'écrit pour le calcul mental peut être nécessaire dans un premier temps pour soulager la mémoire de travail. L'élève peut par exemple noter le résultat du produit par 10 avant de chercher la moitié de ce produit.

Le champ numérique peut être adapté quand il s'agit de retravailler une procédure.

Déroulement de la séquence

Les trois premières séances sont consacrées à l'enseignement de la procédure. La 4^e séance vient questionner la stratégie en confrontant cette procédure à d'autres dans des contextes numériques variés. Enfin, la 5^e séance rebrasse différentes procédures enseignées depuis le début de l'année.

Séance	Objectifs	Durée	Descriptif
Séance 1 Focus	Découvrir une procédure en réponse à un besoin.	45 min	Introduction et institutionnalisation de la procédure de calcul visée, élaboration de la trace écrite et premières utilisations par les élèves. Premières utilisations guidées de la procédure (cf. Annexes 1, 2 et 3).
Séance 2 (et plus si besoin)	Assoir la procédure.	25 min	Enchainements d'items traités sur l'ardoise. On alterne diverses modalités : projeter ou dicter un item après l'autre et projeter les items par série de 5. Une très large place sera accordée à la verbalisation de la procédure en appui sur la trace écrite réalisée en séance 1 (cf. Annexe 4).
Séance 3 (au minimum 2 fois et plus si besoin)	Assoir la procédure.	20 min la première (10 min les suivantes)	Enchainements d'items traités sur papier. On propose des items par série avec une contrainte temporelle (cf. Annexe 4).
Séance 4 Focus (au minimum 2 fois et plus si besoin)	Savoir recourir à la procédure dans des cas adaptés.	30 min la première (10 min les suivantes)	Proposition d'items qui sortent du domaine de pertinence de la procédure enseignée. Afin de ne pas engager les élèves dans un recours automatique à celle-ci, un temps de réflexion préalable est imposé (cf. Annexes 5 et 6).
Séance 5	Savoir retrouver la procédure la plus adaptée au calcul proposé.	30 min	Rebrassage des procédures enseignées précédemment. On travaille sur des séries mixtes où l'on doit utiliser des procédures différentes en fonction des calculs.

Les quatre premières séances doivent être conduites dans un intervalle de deux semaines de manière à ancrer cet apprentissage. Des séances comme la **séance 5** peuvent être différées et vues comme une évaluation permettant de réguler les acquisitions des élèves.

Une fois ces procédures enseignées, il convient de les réinterroger régulièrement afin qu'elles ne soient pas oubliées.

Courbe de l'oubli et effet des rappels espacés.

L'oubli est un processus naturel et prévisible. Hermann Ebbinghaus décrit comment nous perdons rapidement les informations nouvellement apprises si nous ne les révisons pas.

La répétition espacée à intervalles croissants (après 1 jour, puis 3 jours, puis 1 semaine, etc.) peut considérablement ralentir cette courbe.

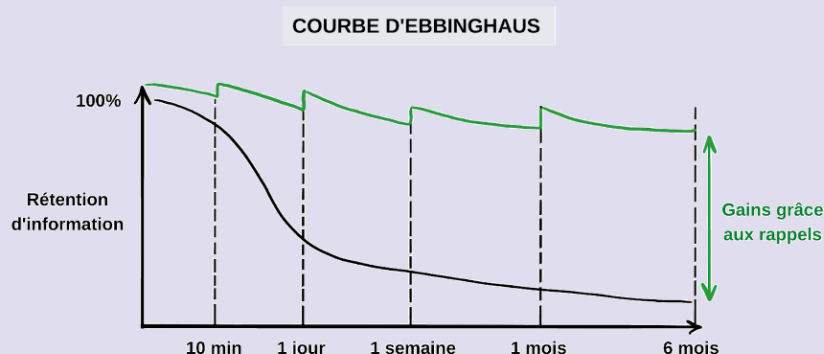


Schéma pédagogique adapté d'après Murre et Dros (2015) et Cepeda et al. (2006)

La rétention diminue avec le temps, mais des réactivations régulières favorisent la consolidation des apprentissages.

Différents domaines peuvent être propices à une réactivation (proportionnalité, résolution de problèmes, algèbre, etc.). Ainsi, l'enseignant pourra proposer des items tels que :

- Axel achète 5 T-shirts identiques à 16 € pièce. Combien va-t-il payer ?
- Si 3 jeux valent 37 €, quel sera le prix de 15 jeux ?
- Je pense à un nombre, je le divise par 5 puis j'ajoute 1. Je trouve 43. Quel était mon nombre de départ ?
- Paul a déjà parcouru 18 km, soit $\frac{1}{5}$ de son parcours. Quelle est la longueur totale de son parcours ?

Focus sur la séance 1 – Découverte de la procédure²

Objectif

Comprendre l'intérêt d'acquérir la procédure visée et commencer à l'utiliser.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

L'enseignant annonce aux élèves qu'une nouvelle procédure de calcul, qu'il ne nomme pas, sera utilisée pour gagner en rapidité et en efficacité. Une fiche leur est distribuée pour qu'ils la complètent le plus rapidement possible (cf. **Annexe 1 : fiche élève**). Il les encourage en précisant qu'ils peuvent commencer par ce qui leur paraît le plus accessible.

² Cette séance a de fortes similitudes avec [la séance filmée « Calcul mental »](#) site académique de Lille.

Après trois minutes de recherche individuelle, l'enseignant demande aux élèves de poser leurs stylos.

Un temps d'échange collectif suit, au cours duquel il présente l'objectif : multiplier rapidement par 5. L'enseignant écrit alors au tableau le titre de la séance : « *Comment multiplier rapidement un nombre par 5 ?* », qui servira de base à la trace écrite.

Les élèves et l'enseignant analysent ensemble la procédure cible. Ils ne cherchent pas, pour cette séance, à lister toutes les méthodes possibles (ce point pourra être abordé lors de la séance 4). L'objectif principal est que les élèves comprennent qu'il est souvent plus efficace, pour multiplier par 5, de commencer par calculer « *10 fois le nombre* » puis de prendre la moitié du résultat pour obtenir « *5 fois le nombre* ».

C'est à l'enseignant d'amener la procédure si aucun élève ne la propose tout comme il en profite pour verbaliser :

- que lorsqu'une procédure a été enseignée, on peut trouver les résultats plus aisément (justesse et rapidité).
- le lien entre multiplier par 10 (deuxième colonne) et l'objectif de la séance : multiplier par 5 (première colonne). Exemple de verbalisation : « Quel est le lien entre 10 et 5 ? 5 c'est la moitié de 10, 5 c'est 10 divisé par 2. »

Ce temps a pour visée de rédiger collectivement la trace écrite. L'institutionnalisation de la procédure repose, autant que possible, sur les propos et remarques formulés par les élèves. Afin de répondre à la question laissée en suspens au tableau, on vient formuler que « Pour multiplier rapidement un nombre par 5, on peut le multiplier par 10 puis chercher la moitié du résultat obtenu. » On peut rappeler aux élèves que prendre la moitié, c'est diviser par 2.

Point d'attention

Afin de ne pas enfermer les élèves dans des automatismes qui ne feraient pas sens, il convient de s'assurer de la bonne compréhension de ces étapes. Des questions de ce type peuvent être proposées : Pourquoi multiplie-t-on d'abord par 10 alors qu'on cherche à multiplier par 5 ? Pourquoi cherche-t-on ensuite la moitié ? Pourquoi l'écrit-on $\div 2$?

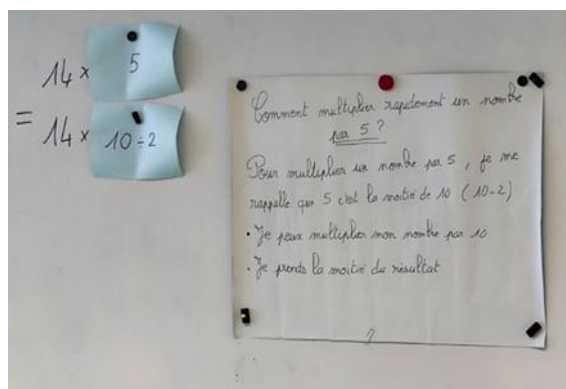
Si un élève est en capacité de verbaliser la procédure attendue, la parole lui sera donnée. À défaut, l'enseignant verbalisera les procédures qu'il utilise pour multiplier par 5. « *Pour calculer 5 fois 14, je me dis que je sais que 5 c'est la moitié de 10, je peux donc commencer par multiplier par 10, c'est-à-dire chercher combien font 10 fois 14 et ensuite il faudra diviser par 2, c'est-à-dire calculer la moitié du nombre obtenu pour trouver le résultat cherché.* »

Pour la première étape, le [glisse-nombre](#) peut accompagner une verbalisation du type : « Dix fois quatorze, je sais le calculer : chaque chiffre a une valeur dix fois plus grande. Ainsi, 10×14 équivaut à 140. » On écrit donc $10 \times 14 = 140$.

Pour la seconde étape, je pars du résultat obtenu afin d'en trouver la moitié. « La moitié de 140, je sais le faire, cela donne 70. » L'enseignant écrit donc $140 \div 2 = 70$.

Ensuite, il convient de compléter l'égalité : $5 \times 14 = 70$.

L'enseignant conclut ce temps en précisant aux élèves que le travail conduit ici à partir d'exemples est vrai pour tous les nombres et qu'il s'agit donc maintenant de s'entraîner à l'aide de la trace écrite qui reste affichée au tableau.



Temps 2 – Mise en activité des élèves

L'enseignant propose cinq items qui permettent de mettre en œuvre la procédure enseignée. Les items proposés pourraient être les suivants : 5×64 ; 5×82 ; 5×45 ; 5×122 ; 5×186 .

Des calculs du type 5×20 , 5×100 , 5×25 qui font appel à des faits numériques mémorisés ou à d'autres procédures sont exclus.

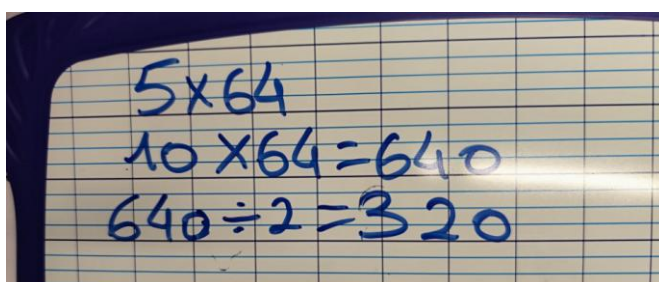
L'ardoise est ici la modalité la plus adaptée. Chaque item est énoncé un par un, sans contrainte forte de temps. Néanmoins l'enseignant maintient un certain rythme, de manière à ce que chaque élève mobilise la procédure plusieurs fois. Les corrections intermédiaires permettent aux élèves de verbaliser les étapes de la procédure.

Points d'attention

L'enseignant est attentif à ce que la verbalisation des élèves s'appuie sur la trace écrite réalisée collectivement au temps 1.

Il valorisera en priorité le recours aux deux étapes de la procédure sans trop s'attarder sur les éventuelles erreurs de calcul.

L'utilisation de l'ardoise permet à l'enseignant d'évaluer l'acquisition de la procédure pour chaque élève : on attend donc, à ce stade, qu'ils fassent figurer le résultat intermédiaire.

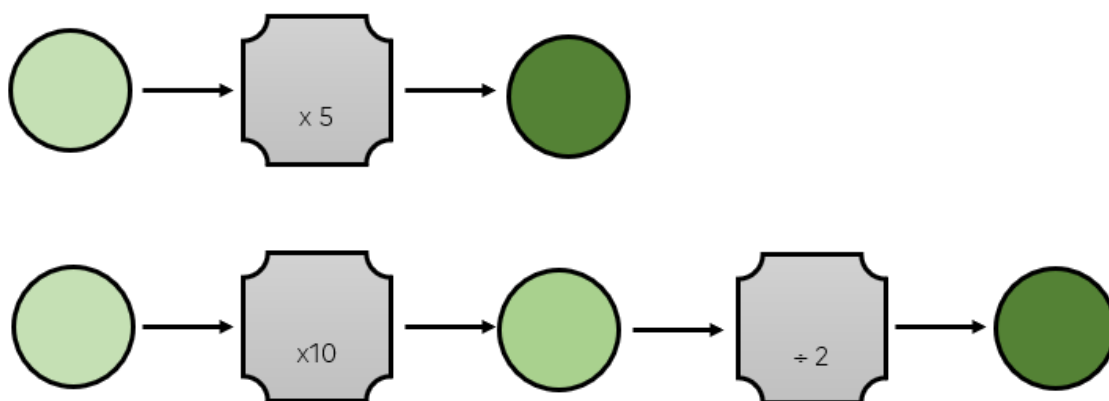


En fonction de cette observation, il est envisageable que l'enseignant verbalise à nouveau la procédure en clarifiant les étapes.

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif

Il est indispensable que chaque élève ait accès à la trace écrite pour s'y référer si besoin aussi bien lors de séances de calcul que de séances de résolution de problèmes (cf. **Annexe 2 : trace écrite**).

Un lien avec l'algèbre est possible en s'appuyant, par exemple, sur des représentations de boîtes à calculer comme ci-dessous.



Temps 4 – Automatisation, réinvestissement

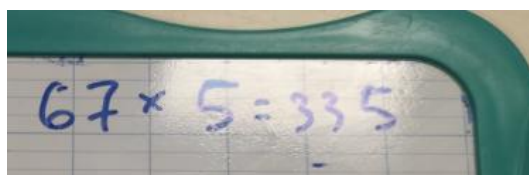
Ce temps permet de revenir sur les items proposés lors du temps 1.

Présentation synthétique des séances 2 et 3 (et plus si besoin)

La procédure est entraînée via la résolution d'un certain nombre d'items afin que les élèves deviennent de plus en plus autonomes (cf. **Annexe 4**). L'enseignant veille à ce que les élèves restent en réussite, en proposant des items relativement proches de ceux proposés lors de la séance précédente. Des items du type 5×20 , 5×100 , 5×25 ne sont pas pertinents ici.

Pour la/les séance(s) 2 (et 3), la modalité choisie lors du temps 2 de la séance 1 est conservée, c'est-à-dire proposer des items les uns après les autres qui sont traités sur l'ardoise, sans contrainte temporelle forte.

Progressivement, l'enseignant note au tableau ou vidéoprojette entre trois et cinq items, les élèves effectuent les calculs sur leur cahier. Ce support permet d'une part de garder trace des réussites individuelles et d'autre part de permettre à chacun d'aller à son rythme. Par ailleurs, il peut être facilitant pour certains élèves de faire figurer le résultat intermédiaire pour progressivement s'en affranchir.



En fonction de ses observations, l'enseignant opère des choix sur les items qui sont repris collectivement. Les retours de l'enseignant ne portent plus nécessairement sur la totalité des items et seule la réponse peut être donnée pour certains calculs. Ces temps de consolidation sont répétés autant que nécessaire et même sur des pages individualisées si besoin.

Pour les séances 3 et suivantes, l'objectif est d'aller vers l'autonomie puis l'automatisation. L'enseignant impose donc une contrainte temps de plus en plus forte. De manière à valoriser et mettre en confiance les élèves, cette séance peut être envisagée en deux temps distincts :

- un temps d'échauffement (par exemple, cinq items en deux minutes) qui permet à l'enseignant de continuer d'accompagner les élèves dans l'application de la procédure. Un ou deux items peuvent être repris collectivement en fonction de ses observations. Ensuite, seul le résultat est donné pour les autres items ;

- un temps d'entraînement (par exemple, quinze items en cinq minutes). Comme précédemment, les retours détaillés ne portent pas sur la totalité des items. La modalité papier est alors plus adaptée que l'ardoise car elle permet une première évaluation : les élèves et l'enseignant conservent une trace du nombre d'items correctement traités. Cela permet de valoriser les progrès et de fixer un objectif pour le prochain entraînement. Pour les élèves les plus en difficulté, l'enseignant veille à identifier les obstacles rencontrés : erreur de calcul à l'une ou l'autre des deux étapes, oubli d'une étape, non connaissance de ce qui doit être fait, utilisation d'une autre procédure, etc. Progressivement, on peut réduire la durée et proposer jusqu'à quinze items en trois minutes.

Différenciation

Des items du type 5×139 peuvent poser problème à certains élèves. La recherche de la moitié nécessite plusieurs étapes de décomposition faisant intervenir ici des nombres impairs. L'enseignant ajuste les items proposés en fonction des erreurs rencontrées. Ce type d'items peut dans un premier temps n'être proposé qu'à une partie de la classe, l'objectif premier est que les élèves s'emparent de la procédure visée au-delà des difficultés calculatoires. Les élèves peuvent s'emparer rapidement des deux étapes de la procédure mais être, pour autant, en difficulté pour trouver le résultat : « Je sais que je dois diviser par deux mais je n'arrive pas à trouver la moitié de 890. » L'enseignant peut donc proposer un répertoire en guise d'étayage pour pallier certains faits numériques manquants. Ces faits numériques doivent être par ailleurs progressivement mémorisés. Un rebrassage régulier et personnalisé peut être conduit, par exemple, via un système de boîtes de Leitner (cf. Éclairage de la recherche).

Des items de calcul mental où il faut multiplier un entier par 5 seront régulièrement proposés tout au long de l'année afin de venir réactiver la procédure, ce qui est essentiel pour lutter contre l'oubli.

Focus sur la séance 4 – Effectuer un choix stratégique parmi plusieurs procédures enseignées

Objectif

Savoir recourir à la procédure dans des cas adaptés.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

L'enseignant propose une fiche avec cinq items qui, cette fois, peuvent conduire à l'utilisation d'une autre procédure que celle enseignée dans cette séquence. Les élèves doivent la compléter le plus vite possible (cf. Annexe 5).

Après une durée d'une minute trente de travail individuel, l'enseignant invite les élèves à poser leurs stylos. Un temps de mise en commun est ensuite consacré à l'analyse de chaque item, en interrogeant les procédures employées par les élèves. Il est important de rappeler que l'objectif principal reste la rapidité de calcul, ce qui implique que la procédure enseignée précédemment n'est pas systématiquement la plus adaptée dans ce contexte.

Pour les items n'entrant pas dans le domaine d'utilisation de la procédure enseignée, l'enseignant peut s'appuyer sur une verbalisation comme celles proposées ci-dessous.

Exemples :

- 5×7 : « Je le sais, c'est dans les tables, 5 fois 7 égale 35. Pas besoin de calculer. »
- 5×100 : « C'est 5 centaines donc 500. »
- 5×30 : « C'est 5 fois 3 dizaines, c'est-à-dire 15 dizaines et ça donne 150. »

Temps 2 – Mise en activité des élèves

L'enseignant propose dix items en trois minutes en invitant les élèves à réfléchir à la stratégie pour trouver le résultat le plus facilement possible (cf. **Annexe 5**).

Suit un temps de mise en commun durant lequel on revient sur les items qui ont conduit à utiliser une autre procédure que celle enseignée.

Point d'attention

Ce temps 2 pourra être reproduit plusieurs fois afin d'habituer les élèves à opérer des choix quant à l'utilisation de la procédure enseignée.

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif

Il s'agit de compléter la trace écrite afin d'y faire figurer des exemples d'items pour lesquels on choisira une procédure différente de celle enseignée (cf. **Annexe 6**).

Temps 4 – Automatisation, réinvestissement

Présentation synthétique de la séance 5

Objectif : savoir effectuer un calcul mentalement en choisissant une procédure adaptée au calcul proposé.

Des séries de calculs reprenant diverses procédures enseignées depuis le cycle 2 sont proposées régulièrement aux élèves. Cela pourra se faire lors de temps de rebrassage, d'évaluation où plusieurs procédures enseignées seront mobilisées à l'instar de ce qui est proposé dans le cadre des évaluations nationales. On garde une contrainte temporelle de quinze résultats en trois minutes.

Par exemple : 34×10 ; 5×43 ; $47 + 19$; $53 + 38$; 167×5 ; $147 + 30$.

Points d'attention

À travers ces tests de fluence³, l'enseignant peut :

- entraîner les élèves à répondre dans un temps limité ;
- entraîner les élèves à passer d'une stratégie à une autre ;
- renforcer la confiance en soi et la réussite de tous les élèves ;
- évaluer la stabilité de la maîtrise de certaines procédures ;
- identifier les élèves pour lesquels un enseignement supplémentaire est nécessaire.

³ La fluence, ici, est la capacité à calculer rapidement à moindre effort.

Proposition de séquence n° 2 – Initiation au raisonnement algébrique

Objectifs

- Déterminer la valeur d'un nombre inconnu en utilisant un symbole ou une lettre pour le représenter.
- Résoudre des problèmes algébriques.
- Les situations proposées amènent à une unique solution (ce qui n'est pas toujours le cas en mathématiques).

Éléments de progression

Niveau	Objectifs d'apprentissage
CM1	• Trouver le nombre manquant dans une égalité à trou. • Déterminer la valeur d'un nombre inconnu en utilisant un symbole ou une lettre pour le représenter. • Exécuter un programme de calcul. • Résoudre des problèmes algébriques.
CM2	• Trouver le nombre manquant dans une égalité à trou. • Exécuter ou produire un programme de calcul. • Résoudre des problèmes algébriques.
6 ^e	• Utiliser des modèles pré-algébriques pour résoudre des problèmes algébriques.

Enjeux pédagogiques

Passer de l'arithmétique à l'algèbre nécessite un changement de regard pour permettre l'apprentissage de nouveaux concepts mathématiques : les élèves doivent passer d'une logique de calcul numérique à une logique de manipulation symbolique afin de **généraliser** des situations, ce qui constitue un saut conceptuel important.

L'acquisition du raisonnement algébrique chez les enfants est un processus progressif qui s'appuie sur la compréhension des structures, des relations, des régularités et des généralisations mathématiques. Dès le cycle 1, l'élève commence à observer des **régularités** à travers le repérage, la description et la création de **motifs organisés répétitifs ou évolutifs**. Au cycle 2, l'acquisition du raisonnement algébrique se poursuit avec l'identification de régularités pour poursuivre une suite non numérique ou numérique. Cet élément peut être déterminé de proche en proche, jusqu'à ce que cela ne soit plus possible par la manipulation ou le calcul. Par exemple, lorsqu'on demande aux élèves « Quel est le 689^e symbole de cette suite « 5, 7, 5, 7, 5, 7, ... » ? », on crée le besoin de pouvoir trouver directement le 689^e terme sans en passer par tous les précédents : ils identifient des régularités puis cheminent vers l'établissement de relations afin d'obtenir des

formules générales. Les élèves deviennent ainsi capables d'anticiper la valeur de chaque élément, quel que soit son rang dans la suite.

Au cours élémentaire, le symbole « = » utilisé initialement entre un calcul et son résultat prend un sens plus large en tant que symbole indiquant l'égalité de deux termes conduisant notamment à trouver des nombres inconnus comme dans « ... + 8 = 15 », mais aussi dans l'autre sens « 45 = 9 × ... ». Ces égalités à trou, où le signe égal repose sur un principe d'équivalence, sont les prémices des équations qui sont le cœur de l'algèbre.

L'objectif visé au cycle 3, et plus particulièrement dans la séquence proposée ici, est d'accompagner cette transition de l'arithmétique à l'algèbre. On vise toujours à **donner du sens** aux actions menées et à faire en sorte que la formalisation algébrique, la symbolisation ou l'écriture avec des lettres ne deviennent pas **des objets manipulés mécaniquement sans compréhension**.

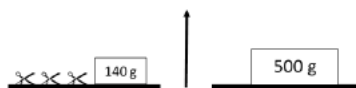
L'utilisation du signe égal comme symbole d'égalité entre deux termes non nécessairement connus crée un obstacle aux apprentissages des élèves. Il doit faire l'objet d'une explicitation précise de la part de l'enseignant. La séquence proposée installe la relation d'égalité sans s'appuyer sur l'écriture mathématique qui sera introduite ultérieurement. Dans cette séquence, les élèves apprennent à interpréter, conserver ou rétablir une situation d'égalité.

Démarche d'enseignement

Choix de conception

En CM1, les élèves doivent savoir résoudre des problèmes tels que⁴ :

Maxime a mis trois paires de ciseaux identiques sur un plateau de sa balance et a obtenu l'équilibre en ajoutant différents poids comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Quelle est la masse d'une paire de ciseaux ?

La résolution d'un tel problème passe par plusieurs étapes qui sont le fil conducteur de la séquence ici proposée.

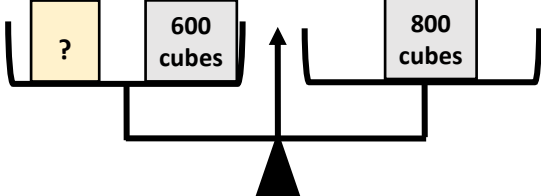
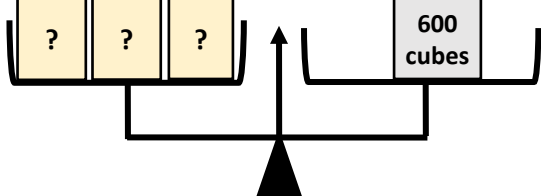
Il s'agit en ce début de cycle 3 d'une première approche de résolution de problèmes algébriques. Le travail mené ne vise pas un formalisme trop précoce qui passerait uniquement par la résolution d'équations. L'objectif porte sur le développement du raisonnement algébrique et la manipulation de nombres et grandeurs inconnus représentés par des symboles ou des lettres. Cette familiarisation impose un recours important à la verbalisation de l'enseignant et des élèves qui pourra s'appuyer sur des manipulations. De manière à ce que les élèves puissent agir individuellement et directement, le choix s'est porté, pour les premiers problèmes, sur des objets tangibles facilement utilisables dans un contexte de classe : des cartes et des enveloppes (cf. **Annexe 1** : séance1_matériel_à_dupliquer). Pour chaque situation des séances 1 et 2, l'enseignant rappelle régulièrement aux élèves que le nombre de cartes par enveloppe est le même.

Le matériel proposé permet également une vérification à chaque étape par l'ouverture des enveloppes qui contiennent les cartes.

⁴ Éduscol, [Exemples pour la mise en œuvre des programmes Mathématiques CM1](#)

Le concept d'équilibre ou d'égalité est fondamental en algèbre. Après avoir manipulé des objets tangibles et utilisé des représentations en parallèle, les élèves sont progressivement amenés à ne plus manipuler et s'appuyer uniquement sur des représentations. La balance à plateaux permet d'explorer de façon plus visible, diverses stratégies pour déterminer une masse inconnue tout en maintenant l'égalité des masses entre les deux plateaux de la balance. Quand cette représentation est bien ancrée, on peut l'utiliser pour un transfert vers d'autres grandeurs puis progressivement s'en affranchir pour aller vers davantage d'abstraction.

Dans un premier temps, il est nécessaire de proposer des situations qui permettent de s'assurer que les élèves distinguent bien les situations qui relèvent du champ additif de celles qui relèvent du champ multiplicatif (opération inverse de l'addition et de la multiplication). Ces situations permettent de vérifier que les élèves distinguent bien le sens de la soustraction de celui de la division.

Champ additif	Champ multiplicatif
$x + b = d$	$ax = d$
	

Prérequis

La grandeur masse est fréquemment convoquée dans cette séquence. Dès le cycle 1, les élèves sont habitués à utiliser une balance de type Roberval afin de réaliser un équilibre, de reconnaître une égalité entre deux masses. En explorant et en manipulant, les élèves sont amenés à rétablir un équilibre : lorsqu'on retire une masse sur un des plateaux d'une balance, on doit alors retirer la même masse sur l'autre plateau. L'enseignant est vigilant à ce que ces attendus soient stabilisés pour l'ensemble des élèves.

Lorsque l'on cherche à déterminer la valeur d'un nombre inconnu, bon nombre de situations proposées reviennent à des situations de recherche de valeur d'une part de ce type : « 4 gommes identiques pèsent 84 g. Combien pèse une seule gomme ? », l'enseignant amène les élèves à s'appuyer sur une verbalisation du type « Si 4 gommes identiques pèsent 84 g, alors 1 gomme pèse 4 fois moins. » comme cela est fait lors de situations de proportionnalité (cf. séquence proportionnalité de ce livret).

Déroulement de la séquence

Séance	Objectifs	Durée	Modalités
Séance 1 focus	Assoir le sens des opérations dans un contexte algébrique.	40 min	Cette première séance vise une première distinction entre les situations algébriques relevant du champ additif et celles relevant du champ multiplicatif, en s'appuyant sur le sens des opérations convoqué dès le cycle 2. Ces premières situations d'égalité sont modélisées par l'utilisation de cartes et d'enveloppes (cf. Annexe 1).
Séance 2 (et plus si besoin)	Mobiliser le sens des opérations dans un contexte algébrique.	15 min la première (10 min les suivantes)	En appui sur la trace écrite construite à la séance 1, les élèves s'entraînent sur des items similaires. La verbalisation étant ici le lien incontournable permettant d'assurer le passage vers l'automatisation. Les élèves doivent être en capacité d'associer situations et opérations car cela sert de prérequis aux séances suivantes. Ainsi, le nombre de séances proposées sera variable.
Séance 3	Introduire une nouvelle représentation pour résoudre des situations algébriques : la balance à plateaux.	30 min	Cette séance introduit la représentation sous la forme de balance à plateaux. Cette dernière se pose en situation de référence pour les situations d'égalité du fait qu'elle rende visible l'équilibre (cf. Annexe 2).
Séance 4 Focus	Résoudre des situations algébriques combinant les champs additifs et multiplicatifs.	40 min	En appui sur la représentation sous forme de balance à plateaux, les étapes de résolution de ces problèmes sont explicitement enseignées.
Séance 5 (et plus si besoin)	S'entraîner à résoudre des situations algébriques.	10 min	Des items type QCM sont proposés aux élèves. Ils doivent néanmoins être en capacité de justifier leur choix. La modalité diaporama permet d'enchaîner les items tout en laissant un temps pour la verbalisation (cf. Annexe 4 : séance5_diaporama).
Séance 6	Élargir la compétence de résolution de problèmes algébriques à d'autres contextes (prix, contenance, etc.).	40 min	En s'éloignant des deux contextes précédents, les élèves s'entraînent à déterminer la valeur d'un nombre inconnu (cf. Annexe 5).

Focus sur la séance 1 – Des situations de maintien d’une égalité

Objectif

Assoir le sens des opérations dans un contexte algébrique.

Enjeux

Cette première séance permet de travailler le sens des opérations, en venant distinguer les situations qui mobilisent le champ additif de celles qui mobilisent le champ multiplicatif. Cet apprentissage diffère de ce qui a été travaillé dès le cycle 2 dans des contextes arithmétiques (par exemple : la recherche d’une partie d’un tout ou la recherche de la valeur d’une part). Dès le CP, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes de ce type : « 3 enfants se partagent 18 images. Tous les enfants doivent avoir le même nombre d’images. Combien d’images aura chaque enfant ? », problèmes pour lesquels on agit sur une unique quantité : les 18 images initiales sont les mêmes que les 18 images partagées.

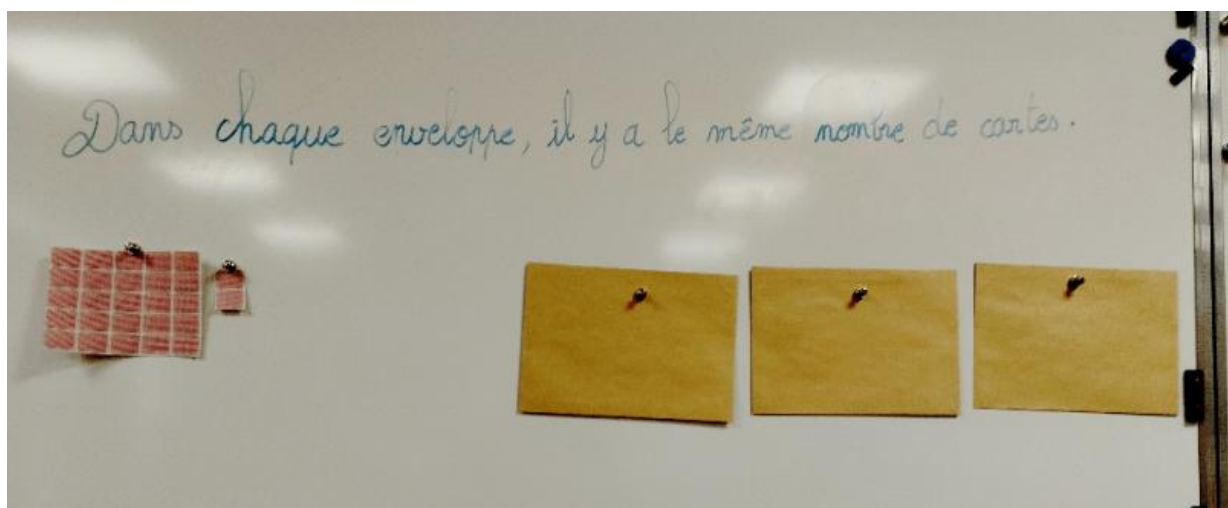
Dans un contexte algébrique comme proposé dans cette séquence, les situations mettent en relation deux quantités distinctes. Ainsi dans un problème du type : « Théo a trois enveloppes contenant le même nombre de cartes. Léa a 18 cartes. Théo et Léa ont le même nombre de cartes. Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe ? », les cartes de Théo ne sont pas les mêmes que celles de Léa.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

Première situation

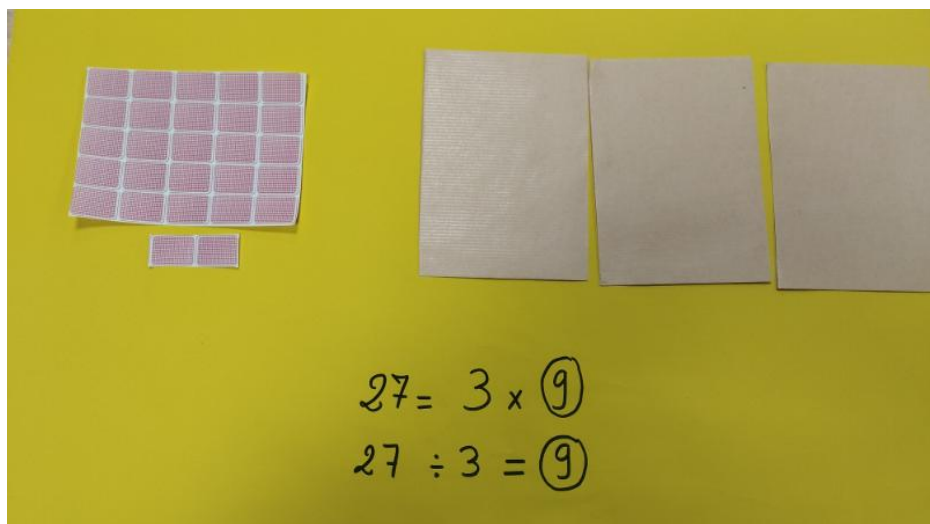
L’enseignant présente la situation et dispose le matériel correspondant (cf. **Annexe 1** : séance1_matériel_à_dupliquer) : « Voici des enveloppes et des cartes. Dans chaque enveloppe, il y a le même nombre de cartes. Vous ne savez pas combien il y en a et c’est ce que vous allez devoir trouver. D’un côté, je vous ai mis ce que possède Marion, ici 27 cartes et de l’autre côté ce que possède Azaria, ici 3 enveloppes. On sait qu’ils ont tous les deux le même nombre de cartes : Marion a autant de cartes qu’Azaria.

Aujourd’hui, nous allons voir ensemble comment trouver le nombre de cartes contenues dans chaque enveloppe alors que je ne les vois pas. »



Les élèves disposent de deux ou trois minutes de réflexion individuelle pour répondre à la question : « Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe ? ». Ils travaillent et répondent sur leur ardoise. L'enseignant circule dans les rangs pour s'assurer de la bonne compréhension.

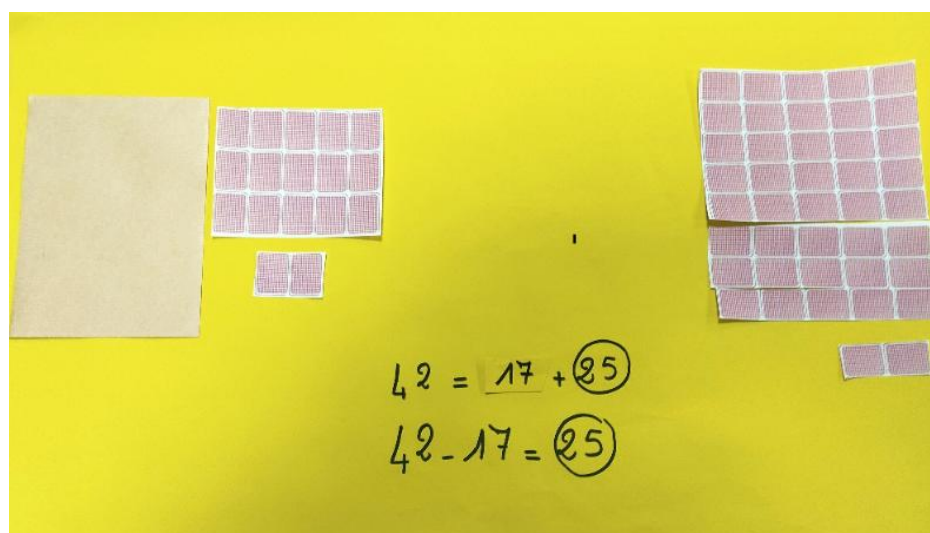
Cet item volontairement simple permet d'orienter le retour réflexif non vers la recherche de la réponse mais davantage vers l'opération associée et la verbalisation de ce qui a été mené. L'ouverture des enveloppes permet, si nécessaire, de s'assurer qu'il y a bien 9 cartes dans chacune d'elles et 27 en tout. Même si « $27 = 9 + 9 + 9$ » peut être proposé par les élèves, l'enseignant veille à noter « $27 = 3 \times 9$ » et « $27 \div 3 = 9$ ». L'objectif étant d'associer cette situation au champ multiplicatif et de bien insister sur le sens de la division. Cette première situation donne lieu à une trace écrite :



Deuxième situation

Un deuxième énoncé est proposé, il permet d'aborder le champ additif : « Continuons, Théo a une enveloppe contenant des cartes et 17 cartes hors de l'enveloppe. Léa a 42 cartes. Théo et Léa ont le même nombre de cartes. Combien y a-t-il de cartes dans l'enveloppe de Théo ? »

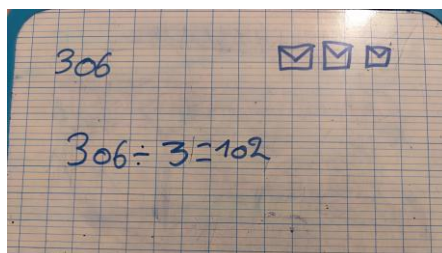
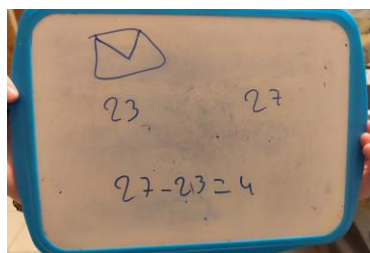
L'enseignant dispose le matériel correspondant au tableau et laisse deux à trois minutes de réflexion individuelle aux élèves qui travaillent sur leur ardoise. L'objectif est d'arriver au résultat et de faire prendre conscience que deux égalités peuvent être écrites ici « $42 = 17 + 25$ » et « $42 - 17 = 25$ », la première traduisant l'égalité du nombre de cartes entre Théo et Léa, la seconde rendant compte du calcul à effectuer pour trouver la réponse. Le résultat peut se vérifier par l'ouverture de l'enveloppe. L'objectif ici est de rendre visible l'opération associée et d'en garder trace :



Temps 2 – Mise en activité des élèves

Entraînement

L'enseignant propose des problèmes similaires, un par un, en les vidéoprojetant au tableau. Il laisse deux minutes par énoncé aux élèves pour répondre à la question sur l'ardoise. L'objectif porte davantage sur l'opération à retrouver que sur le résultat.



Série de problèmes :

- Lucie a une enveloppe contenant des cartes et 23 cartes. Marie a 27 cartes. Lucie et Marie ont autant de cartes. Combien y a-t-il de cartes dans l'enveloppe ?
- Azad a 4 enveloppes contenant chacune le même nombre de cartes. Laura a 24 cartes. Azad et Laura ont le même nombre de cartes. Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe ?
- Arthur a 306 cartes. Béa a 3 enveloppes contenant chacune le même nombre de cartes. Arthur et Béa ont autant de cartes. Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe ?
- Telma a une enveloppe contenant des cartes et 223 cartes. Marco a 251 cartes. Telma et Marco ont autant de cartes. Combien y a-t-il de cartes dans l'enveloppe ?

La correction est menée collectivement avant de passer au problème suivant.

Travail en autonomie

Deux problèmes sont proposés ensuite aux élèves. Ils sont traités dans les cahiers. L'enseignant circule dans les rangs pour vérifier et valider les réponses des élèves. Un temps de retour collectif peut être proposé à la suite de la recherche individuelle au regard des difficultés éventuelles.

- Arthur a 92 cartes. Claire a 4 enveloppes contenant chacune le même nombre de cartes. Arthur et Claire ont autant de cartes. Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe ?
- Noé a une enveloppe contenant des cartes et 1873 cartes. Gaëlle a 2151 cartes. Noé et Gaëlle ont autant de cartes. Combien y a-t-il de cartes dans l'enveloppe ?

Présentation synthétique de la séance 2

L'enseignant propose des items similaires à ceux de la séance 1 que les élèves résolvent en appui sur la trace écrite construite précédemment. Cette dernière sert de référence et permet aux élèves de s'emparer progressivement de la verbalisation. Après deux items traités l'un après l'autre sur ardoise (un relevant du champ multiplicatif et un du champ additif), l'enseignant propose à certains élèves d'en enchaîner plusieurs sur le cahier tandis qu'il pourra se libérer afin d'accompagner les élèves les plus en difficulté. Une table d'appui peut donc être proposée afin d'accompagner les élèves à distinguer les énoncés multiplicatifs des énoncés additifs. La trace écrite sert de support.

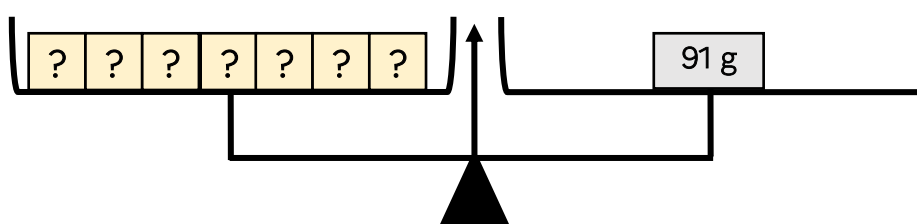
- 36 cartes, c'est 4 enveloppes.
- 1 enveloppe et 18 cartes, c'est 37 cartes.
- 50 cartes, c'est 1 enveloppe et 25 cartes.

- 5 enveloppes, c'est 515 cartes.
- 60 cartes, c'est 12 enveloppes.
- 100 cartes, c'est 1 enveloppe et 48 cartes.

Le temps de retour porte uniquement sur quelques items. Les autres problèmes ont été dans la mesure du possible corrigés par le professeur en circulant pendant la séance, ou, sinon, après la séance.

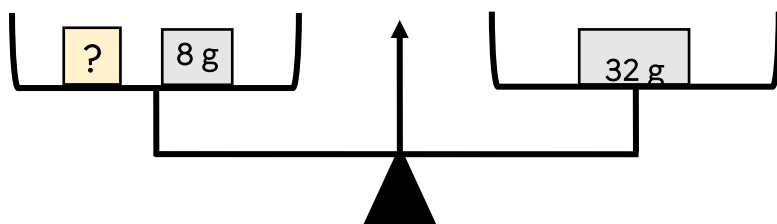
Présentation synthétique de la séance 3

L'enseignant affiche la représentation suivante et pose les questions suivantes : « Si je vous dis que les boîtes mystère ont toutes la même masse, peut-on trouver la masse d'une boîte ? Je vous laisse chercher sur vos ardoises. »



Si les élèves lors de la résolution ou de la correction ne font pas spontanément référence aux problèmes sur les enveloppes, l'enseignant peut poser la question : « Est-ce que cela vous rappelle quelque chose ? ». On s'attend à ce que les élèves répondent « oui, c'est comme les enveloppes et les cartes. » Le cas échéant, l'enseignant poursuit le questionnement pour arriver à cette réponse. Une fois cette analogie posée, la trace écrite de la séance 1 devient un point d'appui et un lien est fait entre les deux problèmes : « C'est comme si on avait 7 enveloppes avec autant de cartes dans chaque enveloppe et qu'en tout il y a 91 cartes. ». On apporte ainsi la réponse mais également la verbalisation correspondante où les enveloppes sont remplacées par des boîtes mystère et les cartes par des masses.

En suivant les mêmes modalités, un second item relevant du champ additif est proposé.



Afin de s'assurer de la bonne compréhension, l'enseignant peut revenir pour totalité ou partie des élèves à une manipulation d'objets tangibles. Il utilise une balance à plateaux, des cubes emboîtables (ou tout autre objet identiquement calibré et entrant dans le seuil de sensibilité de la balance) et des boîtes mystère identiques. Il revient sur comment maintenir l'équilibre sur une balance avec des questions du type :



- « Si j'ajoute 5 cubes sur ce plateau, que dois-je faire pour maintenir l'équilibre ? »
- « Si je retire 3 cubes de ce plateau, que dois-je faire pour maintenir l'équilibre ? »
- « Si je retire 1 boîte mystère de ce plateau, que dois-je faire pour maintenir l'équilibre ? »

Différenciation

Une balance de Roberval peut être laissée en fond de classe à disposition des élèves pour qui un entraînement par la manipulation est encore nécessaire.

Des situations similaires sont proposées aux élèves. Ils les résolvent sur feuille (cf. **Annexe 2** : séance3_exercices).

Le temps de retour collectif ne vise pas une correction de tous les items mais s'organise plutôt à partir des observations conduites par l'enseignant. Ainsi, il choisit les items sur lesquels s'arrêter, c'est-à-dire davantage sur les erreurs de choix des opérations que sur les erreurs de calcul. Il s'attache à faire verbaliser les élèves en prenant appui sur la trace écrite.

Focus sur la séance 4 – Des situations algébriques complexes

Objectif

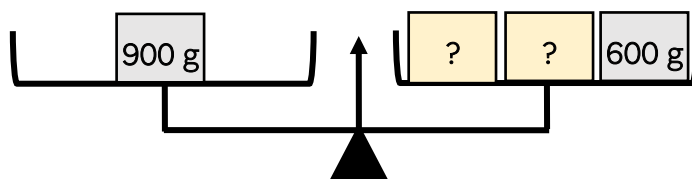
Résoudre des situations algébriques combinant les champs additifs et multiplicatifs.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

L'enseignant demande aux élèves de rappeler les deux types de problèmes qui ont été travaillés lors des séances précédentes. Il projette deux énoncés de la séance 3, un du champ multiplicatif et un du champ additif afin qu'ils verbalisent le lien entre chaque situation et l'opération associée. À ce moment, l'enseignant annonce l'objectif de la séance : « Aujourd'hui, nous allons apprendre à résoudre des problèmes qui mêlent les deux situations. »

Il poursuit en énonçant le problème suivant : « Sur une balance à plateaux, je pose d'une part 900 g et d'autre part, deux boîtes mystère identiques et 600 g. Les deux plateaux sont à l'équilibre. Quelle est la masse d'une boîte mystère ? » Il le projette accompagné de cette représentation⁵.

Dans un premier temps, les données numériques sont volontairement simplifiées afin d'insister sur le sens des opérations et non sur le résultat.



Les élèves travaillent individuellement sur l'ardoise.

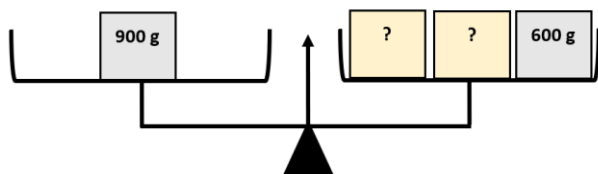
Points d'attention

En dépit de la multiplicité des procédures possibles, l'enseignant effectue un choix, celui de commencer par opérer par retrait pour trouver la masse des deux boîtes, avant de trouver la masse d'une boîte. Ici, il commence par retirer 600 g de part et d'autre de la balance puis divise ce qu'il reste par 2 afin d'obtenir la masse d'une seule boîte mystère.

En appui sur la trace écrite, l'enseignant questionne quant au choix des opérations à effectuer. Le passage d'un problème à une étape à un problème à deux étapes vient questionner au-delà de ce choix, l'ordre des étapes de résolution. Cet ordre mérite d'être explicitement posé.

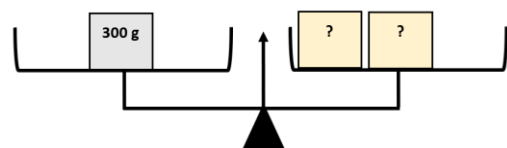
⁵ Une planche de balances à plateaux vierge est placée en annexe. Elle permet à l'enseignant de créer ses propres situations algébriques (cf. **Annexe 3** : séance4_balance_vierge).

Affichage procédural construit avec les élèves.

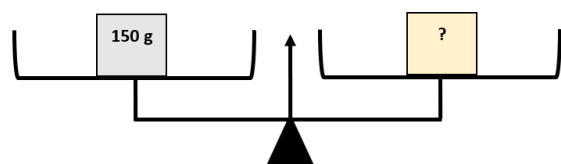


Quand j'ai des boîtes et des masses d'un même côté :

1) Je retire la même masse de chaque côté de manière à garder l'équilibre.



2) Je divise la masse restante par le nombre de boîtes.



Temps 2 – Mise en activité des élèves

Ce temps est d'abord fortement guidé pour aller progressivement vers l'autonomie des élèves.

Des items de même type que le précédent sont proposés en utilisant la représentation sous forme de balance à plateaux :

- Premier plateau : 80 g et 2 boîtes mystère / Second plateau : 200 g ;
- Premier plateau : 925 g et 10 boîtes mystère / Second plateau : 2725 g ;
- Premier plateau : 670 g / Second plateau : 250 g et 7 boîtes mystère ;
- Premier plateau : 228 g et 5 boîtes mystère / Second plateau : 478 g.

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif

L'enseignant rappelle l'objectif de la séance et revient sur les réponses clés apportées par les élèves. Il identifie l'item qui a posé le plus de difficultés aux élèves et accompagne la résolution de ce dernier. Il explique les différentes étapes de résolution.

Point d'attention

En fonction du taux de réussite lors de ces derniers items réalisés en autonomie, de courtes séances décrochées pourront être mobilisées de manière à consolider la compétence « Calculer » dans ce type de situation. Des items similaires au temps 4 (automatisation, réinvestissement) seront donc proposés.

Présentation synthétique de la séance 5

Des items type QCM sont proposés aux élèves. Ils doivent néanmoins être en capacité de justifier leur choix. La modalité diaporama permet d'enchaîner les items tout en laissant un temps pour la verbalisation (cf.

Annexe 4 : séance5_diaporama).

Présentation synthétique de la séance 6

Objectif

Transférer les compétences acquises vers des contextes variés.

Enjeu

L'enjeu de ces séances courtes est que les élèves puissent progressivement faire de manière autonome le lien entre les situations travaillées précédemment (les enveloppes et les cartes, les balances à plateaux) et les situations proposées en annexe (cf. **Annexe 5** : séance6_énoncés). Ainsi, l'enseignant peut théâtraliser la relation d'égalité en utilisant ses mains en guise de plateaux. Ces différents items sont à proposer plusieurs fois, en les espaçant progressivement dans l'année : à la suite de la séance 5, puis quinze jours plus tard, puis un mois plus tard, puis deux mois plus tard, etc.

Points d'attention

L'enseignant s'assure de la bonne compréhension de la grandeur ciblée. Par exemple, lors de la résolution du second énoncé, il veille à verbaliser le fait qu'on s'attache non pas à la longueur ou la masse de la banane mais à son prix.

Proposition de séquence n° 3 – Enseigner les probabilités

Objectifs

- Se familiariser avec la notion d'expérience aléatoire.
- Catégoriser des événements comme certains, impossibles, probables, peu probables, ou dont la probabilité est d'« une chance sur deux ».
- Décrire une expérience aléatoire et identifier toutes ses issues.

Éléments de progression

Niveau	Référence au programme et progressivité
CM1	• Identifier toutes les issues possibles lors d'une expérience aléatoire simple. • Comprendre et utiliser le vocabulaire approprié : « impossible », « possible », « certain », « probable », « peu probable », « une chance sur deux ». • Comparer des issues d'expériences aléatoires ou des événements selon leur probabilité de réalisation. • Reconnaître des situations d'équiprobabilité.
CM2	• Dans une situation d'équiprobabilité, lors d'une expérience aléatoire simple, exprimer la probabilité d'un événement sous la forme « a chances sur b ». Comparer des probabilités dans des cas simples. • Comprendre la notion d'indépendance lors de la répétition de la même expérience aléatoire. • Dans des situations d'équiprobabilité, recenser toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire en deux étapes dans un tableau ou dans un arbre afin de déterminer des probabilités.
6 ^e	• Comparer des résultats d'une expérience aléatoire répétée à une probabilité calculée. • Savoir que la probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1. • Calculer et comparer des probabilités dans des situations simples d'équiprobabilités.

Enjeux pédagogiques

Les élèves qui découvrent l'étude des probabilités au CM1 ont déjà côtoyé le hasard. Leurs conceptions peuvent être sources d'erreurs ou de confusions, par exemple :

- l'idée que le hasard ne se mesure pas (l'élève pense que tout est possible et estime qu'il ne peut donner aucune information sur les chances d'obtenir un résultat) ;
- le biais d'équiprobabilité (l'élève pense que tous les cas possibles sont équiprobables : « demain, soit il pleut, soit il ne pleut pas, il y a donc une chance sur deux qu'il pleuve. ») ;
- le biais d'alternance (l'élève prête au hasard certaines régularités, il pense ainsi qu'il y a plus de chances d'obtenir « pile-face-pile-face » que « pile-pile-pile-pile ») ;
- l'effet mémoire (l'élève pense que le hasard s'autorégule et donc que s'il obtient trois fois « pile », les chances d'avoir « face » au quatrième lancer de pièce sont plus élevées) ;
- l'illusion de contrôle (l'élève pense que quand c'est lui qui lance les dés, il y a plus de chances d'obtenir un « 6 », ou que, quand il souffle sur les dés, il augmente les chances d'obtenir un « 6 »).

Il s'agit donc de :

- lever les croyances erronées sur la notion de hasard (« je n'ai jamais de chance », « c'est au hasard donc on ne peut rien dire ») ;
- construire une posture rationnelle face au hasard : il s'étudie, se modélise et se mesure.

Éclairages pour le professeur

L'essentiel

Le concept de **probabilité**, abordé pour la première fois dans les programmes de cycle 3, revêt plusieurs aspects et repose sur des notions mathématiques qui dépassent en partie le cadre de l'école élémentaire. Afin d'enseigner avec justesse les premières intuitions probabilistes, il est utile que l'enseignant dispose d'un éclairage théorique plus large. Le paragraphe qui suit présente donc les fondements du modèle probabiliste classique, en explicitant les notions-clés (expérience aléatoire, issues, univers, évènement, probabilité...) dans une perspective mathématique rigoureuse mais accessible, à travers un exemple d'expérience aléatoire. Ces notions ne relèvent pas du cycle 3 et ne sont donc pas à enseigner. Ce recul permet de mieux comprendre les enjeux didactiques, les limites des modèles proposés aux élèves, et la progressivité des apprentissages à construire. **L'annexe 4** reprend ces éléments et développe les autres aspects des probabilités, dites fréquentiste et épistémique (ou subjective).

- Une expérience aléatoire est une situation dont on ne peut pas prédire avec certitude le résultat mais dont on connaît *a priori* les résultats possibles.

Dans ce qui suit on considèrera l'expérience aléatoire suivante : Un sac opaque contient 5 boules jaunes, 3 boules noires et 2 boules rouges, indiscernables au toucher. On choisit au hasard une boule dans le sac.

- La modélisation suppose l'idéalisation des objets (ici des boules indiscernables au toucher).
- Les résultats possibles sont appelés issues.

Dans l'exemple précédent, les issues sont chacune des 10 boules.

- L'ensemble des issues est appelé **univers**.

L'univers de l'exemple précédent est donc l'ensemble constitué des 10 boules du sac : les 5 boules jaunes, les 3 boules noires et les 2 boules rouges.

- Un évènement est un sous-ensemble de l'univers. Il est donc composé d'issues (aucune, une, plusieurs ou toutes) et peut s'exprimer par une phrase.

Exemples :

- l'évènement « Obtenir une boule rouge » est le sous-ensemble composé des deux boules rouges ;
- l'évènement « Obtenir une boule bleue » est l'ensemble vide, il ne contient aucune issue. Cet évènement est qualifié d'impossible ;
- l'évènement « Obtenir une boule » contient toutes les issues. Cet évènement est qualifié de certain.

La probabilité d'un évènement est un nombre entre 0 et 1 qui mesure sa prévisibilité, qui peut s'exprimer en écriture fractionnaire, à virgule ou sous forme de pourcentage. Au CM1, les probabilités ne seront pas quantifiées en dehors de la qualification d'« une chance sur deux ». Au CM2, les probabilités seront quantifiées en utilisant des expressions de la forme « a chance sur b ».

Exemples :

- la probabilité d'obtenir une boule rouge est égale à $\frac{2}{10}$ (exprimée sous la forme « 2 chances sur 10 » en CM2), c'est-à-dire $\frac{1}{5}$ ou 0,2 ou encore 20 % ;
- la probabilité de l'évènement impossible est égale à 0 ;
- la probabilité de l'évènement certain est égale à 1, c'est-à-dire 100 %.
- Plus on répète l'expérience, plus les fréquences observées sont proches des probabilités calculées (c'est la loi des grands nombres).

Exemple : si on répète un grand nombre de fois l'expérience (en remettant à chaque fois la boule dans le sac), on obtiendra environ 20 % de boules rouges : plus le nombre de répétitions est important, plus la fréquence observée est proche de 20 %.

- Deux évènements sont dits indépendants lorsque la probabilité de réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

Exemple : on choisit une boule au hasard dans le sac, on la remet. On choisit de nouveau une boule au hasard. Les évènements « La première boule est rouge » et « La deuxième boule est rouge » sont indépendants. Que la première boule tirée soit rouge ou non, il y aura 2 chances sur 10 de choisir une boule rouge lors du deuxième tirage. En revanche, si on ne remet pas la boule dans le sac après le premier tirage, alors ces deux mêmes évènements ne sont pas indépendants. En effet, si la première boule est rouge alors la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage sera égale à $\frac{1}{9}$ alors que si la première boule n'est pas rouge alors la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage sera deux fois plus élevée et égale à $\frac{2}{9}$.

Démarche d'enseignement

La manipulation tient une place importante. Le lancer de dés ou de pièces de monnaie, le tirage de jetons ou de boules dans un sac ou une urne opaque, le tirage de cartes dans un jeu de 52 cartes constituent des situations classiques.

Si l'utilisation d'exemples de la vie quotidienne peut s'avérer pertinente (en particulier pour réinvestir le vocabulaire attendu), les expériences aléatoires proposées lors des situations d'apprentissage sont présentées de manière idéale. Par exemple, s'il est vrai qu'une pièce de monnaie pourrait tomber sur la tranche, cette possibilité ne sera pas envisagée. Lors du tirage au hasard d'une boule parmi d'autres, l'hypothèse sera faite que les boules sont indiscernables au toucher et de masse égale. Le dé est supposé

équilibré et lancé toujours de la même manière. Ces hypothèses sont souvent implicites, il conviendra de les énoncer ou de les rappeler régulièrement.

Pour qualifier des probabilités d'évènements, les mots attendus au CM1 sont les suivants :

- certain (l'évènement va se produire) ;
- impossible (l'évènement n'a aucune chance de se produire) ;
- une chance sur deux (il y a autant de chances que l'évènement se produise que de chances qu'il ne se produise pas) ;
- peu probable (l'évènement peut se produire mais il y a moins d'une chance sur deux qu'il se produise) ;
- probable (il y a plus d'une chance sur deux que l'évènement se produise, mais il peut ne pas se produire).

Attendus de fin de séquence :

- dans différentes situations, les élèves utilisent un vocabulaire approprié pour qualifier la probabilité d'évènements (impossible, certain, peu probable, probable, « une chance sur deux ») ou pour comparer des évènements (plus probable que, moins probable, a autant de chances de se produire que) ;
- ils positionnent des évènements sur une échelle de probabilité.

Déroulement de la séquence

Piste d'évaluation diagnostique

En amont, il peut être intéressant pour le professeur de recueillir les représentations initiales des élèves à l'aide d'un court questionnaire, pour identifier les biais qu'il faudra déconstruire lors de la réalisation des séances, en fonction des réponses formulées par les élèves (cf. paragraphe « Enjeux pédagogiques »).

Exemple de questionnaire⁶ :

1. En lançant un dé normal (à 6 faces), penses-tu que tu as le plus de chances d'obtenir un 2 ou un 6 ? Pourquoi ?
2. Mehdi lance une pièce de 1 € quatre fois de suite et n'obtient que des « Pile ». Il décide de la lancer une cinquième fois. Penses-tu qu'il a plus de chances d'obtenir « Pile » ou d'obtenir « Face » ? Pourquoi ?
3. Un sac contient des billes vertes et des billes rouges qui ont toutes la même taille. Il y a 4 billes dans le sac. On choisit au hasard une bille dans le sac. Que va-t-il se passer ? Pourquoi ?

⁶ Ces questions sont inspirées du travail de Jacques Verdier dans l'article « Le hasard au collège », APMEP n° 484.

Séance	Objectifs	Durée	Descriptif
Séance 1 Focus Introduction d'une nouvelle notion	Qualifier des événements en utilisant les mots : « impossible », « certain », « une chance sur deux ».	45 min	Le contenu mystère : les élèves découvrent des expériences aléatoires dont ils ignorent <i>a priori</i> les résultats possibles. L'expérimentation permet de les convaincre du contenu. Après dévoilement, ils expriment différentes probabilités (cf. Annexe 1).
Séance 2 (et plus si besoin) Entraînements, rituels	Réinvestir les mots de vocabulaire précédents. Identifier des événements avec une probabilité égale à « une chance sur deux ».	10 min	Questions flashes sur des situations similaires et des exemples de la vie quotidienne. Ces séances doivent permettre de s'assurer de la bonne maîtrise du vocabulaire par tous les élèves (cf. Annexe 2).
Séance 3 Introduction d'une nouvelle notion	Estimer des probabilités d'événements en utilisant les mots : « probable, peu probable ».	40 min	Le contenu mystère : avec le même dispositif que celui de la séance 1, les élèves découvrent des expériences aléatoires dans lesquelles certains événements ont plus d'« une chance sur deux » de se réaliser ou moins d'« une chance sur deux » (cf. Annexe 1).
Séance 4 (plusieurs séances) Entraînements, rituels	Réinvestir les mots de vocabulaire dans différentes situations.	10 min	Questions flashes sur des situations classiques et des exemples de la vie quotidienne. Ces séances doivent permettre de s'assurer de la bonne maîtrise du vocabulaire par tous les élèves (cf. Annexe 2).
Séance 5 Focus Introduction d'une nouvelle notion	Représenter des événements sur une échelle.	45 min	À travers l'étude de plusieurs événements dans le contexte du lancer d'un dé, les élèves apprennent à utiliser une échelle de probabilités pour utiliser les mots précédemment appris et ordonner les événements en fonction de leur probabilité (cf. Annexe 3).
Séance 6 (plusieurs séances) Entraînements, rituels	Utiliser l'échelle de probabilités en y plaçant des événements.	10 min	Questions flashes sur des situations classiques (billes, dés) et des exemples de la vie quotidienne (cf. Annexe 2).

Évaluation

À l'issue de plusieurs entraînements (séances 2, 4 ou 6), le professeur propose un travail individuel écrit sur feuille qui contient la représentation de cartes.

Pour les séances 2 et 4, les élèves écrivent sous chaque carte une des formulations apprises.

Pour la séance 6, les cartes sont numérotées, ils indiquent la position de l'événement correspondant sur l'échelle des probabilités.

Ces travaux permettent de détecter la nécessité de revenir sur les notions le cas échéant.

Focus sur la séance 1 – Impossible, certain, une chance sur deux

Objectifs

- Qualifier des événements de « certain » et d'« impossible ».
- Identifier une probabilité égale à « une chance sur deux ».

Matériel

(Cf. Annexe 1)

Des bouteilles opaques contenant des billes indiscernables au toucher, avec différentes répartitions par couleur. Quand la bouteille est retournée, elle ne laisse apparaître qu'une bille.

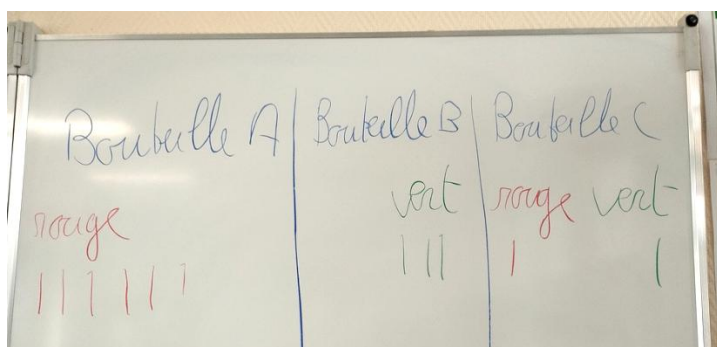
Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

Une première expérience (10 min)

Pour introduire la séquence, l'enseignant explique qu'ils vont mener un travail sur les probabilités en expliquant ce dont il s'agit et en donnant les objectifs principaux de la séquence.

Consigne du professeur : « J'ai trois bouteilles : la bouteille A, la bouteille B et la bouteille C. Dans chaque bouteille, j'ai mis deux billes. J'avais uniquement des billes rouges et des billes vertes. Je ne me souviens plus de ce que contient chaque bouteille mais quand je place la bouteille à l'envers, par exemple pour la bouteille A, je peux voir la couleur d'une bille, ici je vois une bille verte. Comment faire pour trouver la couleur des billes contenues dans chaque bouteille sans les ouvrir ? »

Les échanges s'engagent sur ce qu'il convient de faire, et les différentes bouteilles sont retournées plusieurs fois. Les résultats sont notés au tableau. Par exemple, après quelques « retournements » de chaque bouteille :



Les retournements s'achèvent lorsque les élèves sont convaincus d'avoir identifié le contenu de chaque bouteille.

L'appui sur le raisonnement et la verbalisation permet la justification du contenu : la réponse est certaine pour la bouteille C : dès que deux billes de couleur différente sont observées, on sait qu'il y a une bille de chaque couleur (les élèves doivent d'ailleurs comprendre qu'ils auraient pu s'arrêter dès que la deuxième couleur est apparue, si cela n'a pas été le cas, car il n'y a alors plus de raison de poursuivre les retournements). En revanche, on ne sera jamais sûr de la couleur des deux billes, lorsqu'une seule couleur apparaît, mais le doute devient de plus en plus faible quand le nombre de lancers augmente. Avec une

dizaine de retournements de chaque bouteille, les élèves commenceront à être convaincus du contenu de chaque bouteille.

Ce type de tâche est ce qui sera demandé de façon plus formelle au collège (établir des statistiques sur les résultats obtenus pour émettre des hypothèses) : c'est l'approche fréquentiste. Elle permet d'émettre des hypothèses sur un modèle probabiliste ou de vérifier la validité de celui-ci.

Quand les élèves sont convaincus, le contenu de chaque bouteille est dévoilé et dessiné ou écrit au tableau.

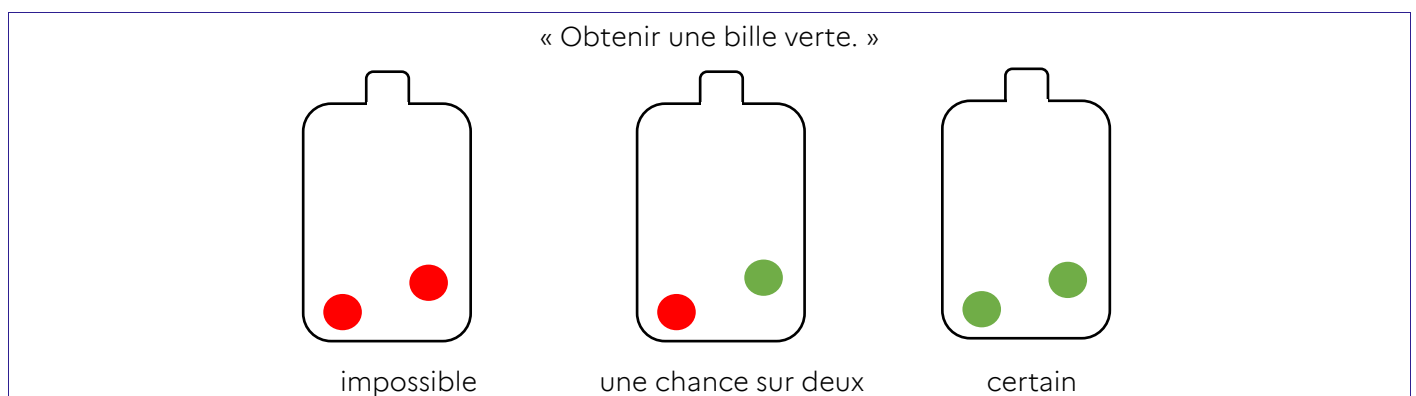
Trace écrite (10 min)

Il est écrit au tableau « Obtenir une bille verte », qui est l'évènement étudié ici.

L'objectif ici est d'arriver à dire :

- que c'est impossible si l'on choisit une bille au hasard avec la bouteille B ;
- qu'il y a une chance sur deux en choisissant une bille au hasard de la bouteille C ;
- que c'est certain avec la bouteille A.

Trace écrite possible dans les cahiers des élèves et en affichage :



Ordonner les probabilités de gauche à droite prépare la représentation sous forme d'échelle.

Pour expliquer la probabilité « une chance sur deux », l'enseignant utilise les formulations spontanées des élèves, telles que « c'est la même chose », « c'est pareil » ou « il y a autant de chances ». Cependant, l'expression « une chance sur deux » peut prêter à confusion : elle pourrait laisser croire, par exemple, qu'il y a une chance sur deux de tirer une bille verte simplement parce qu'il existe deux couleurs possibles.

Il est donc essentiel de préciser que cette probabilité repose sur le fait qu'il y a **autant de billes vertes que de billes rouges**. Ainsi, la probabilité d'obtenir une bille verte est bien d'une chance sur deux, car les chances sont strictement égales pour les deux couleurs.

Ce principe d'équiprobabilité, fondé sur une répartition égale, servira ensuite de base pour justifier cette même probabilité dans d'autres contextes au cours de la séance.

Temps 2 – Mise en activité des élèves

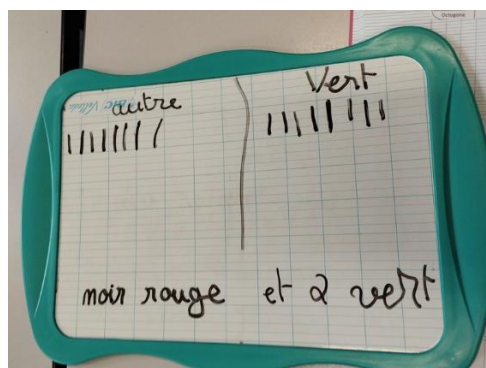
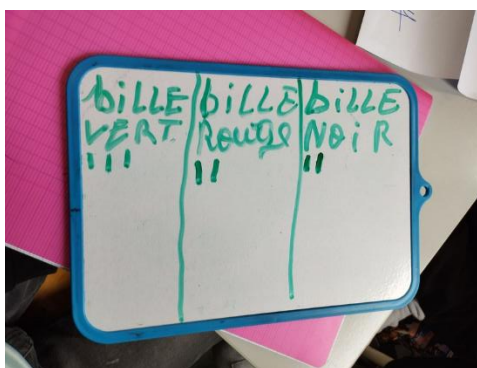
Par binôme (15 min) : une deuxième expérience.

Chaque binôme dispose d'une bouteille contenant 2 billes vertes, 1 bille rouge, 1 bille noire.

Le professeur énonce : « J'ai une autre bouteille, la bouteille D. Elle contient 4 billes. Vous allez devoir dire combien de billes vertes contient cette bouteille. »

Les élèves échangent entre eux et le professeur relance « Est-ce qu'il y en a 0, 1, 2, 3 ou 4 ? Tout est possible. Il va falloir retourner la bouteille de nombreuses fois en mélangeant bien à chaque fois, jusqu'à ce que vous soyez convaincus du nombre de billes vertes qu'il y a dans la bouteille. Quand on s'arrêtera, vous devrez me donner votre réponse. Combien y a-t-il de billes vertes dans la bouteille ? »

Les élèves sont autonomes dans leur organisation de consignation des résultats des tirages, le premier temps de la séance les conduit à utiliser des tableaux comme ceux ci-dessous :



Ici encore, l'appui sur le raisonnement et la verbalisation apporte une justification. Dans un premier temps, l'apparition d'une bille verte permet d'éliminer la proposition de 0 bille verte.

Ensuite, l'apparition d'une bille noire et d'une bille rouge permet d'éliminer les propositions de 3 ou 4 billes vertes.

La question qui doit donc se poser rapidement aux élèves est de savoir s'il peut y avoir une bille d'une quatrième couleur ou s'il y a deux billes d'une même couleur.

Sans calculer de proportion exacte, se référer aux résultats obtenus par les élèves peut permettre de trancher cette question : une bille verte est obtenue à peu près aussi souvent qu'une bille non verte, ou une bille verte est obtenue plus souvent qu'une bille rouge ou qu'une bille noire.

Quand l'hypothèse de deux billes vertes a été établie, les élèves peuvent vérifier que le contenu de leur bouteille correspond bien à leur hypothèse : le contenu des bouteilles est dévoilé à la classe et noté au tableau sous forme d'une phrase ou d'un dessin. Dans la bouteille, il y a 2 billes vertes et 2 billes qui ne sont pas vertes. Toutes les billes ont la même taille.

Temps 3 – Institutionnalisation et retour réflexif

L'enseignant pose la question suivante : « En choisissant une bille au hasard dans la bouteille, quelle couleur est la plus facile à obtenir ? » et relève les propositions des élèves.

Point d'attention

Il ne s'agit plus de réaliser l'expérience, on ne retourne plus la bouteille.

Des formulations comme « il y a plus de chances d'avoir une verte » sont attendues. Le but visé est de conclure que l'évènement « obtenir une bille verte » a une probabilité de réalisation égale à « une chance sur deux » qui sera énoncée par le professeur si les élèves ne l'apportent pas.

Cette formulation est justifiée par la répartition du contenu de la bouteille : « il y a autant de chances d'obtenir une bille verte qu'une bille non verte, car il y a exactement le même nombre de billes vertes que de billes qui ne sont pas vertes. »

Trace écrite possible :

Une bouteille opaque contient 2 billes vertes, 1 bille rouge, 1 bille noire. Elles ont toutes la même taille. En tirant une bille au hasard, on ne peut pas savoir laquelle sera choisie, mais on peut dire :

il y a une chance sur deux d'obtenir une bille verte car la moitié des billes sont vertes.



L'objectif n'est pas encore de qualifier une probabilité par un nombre. Cependant, faire le lien avec « moitié de » permet aux élèves de rencontrer cet aspect qui sera formalisé au collège.

Si elle est émise, la formulation « deux chances sur quatre » sera validée : « deux chances sur quatre, c'est comme une chance sur deux » et sera sujet d'étude au CM2.

Présentation synthétique de la séance 2 – (en lien avec les séances 4 et 6)

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

Pour cette séance, il s'agit, en appui sur les traces écrites de la séance 1, de réinvestir le vocabulaire des probabilités d'abord dans la situation des billes. La justification des résultats apportée par les élèves permet de s'assurer de leur bon niveau de compréhension.

Des situations en lien avec la vie quotidienne sont ensuite abordées mais celles-ci sont justifiées de façon différente⁷.

⁷ Une autre conception de la probabilité, dite épistémique ou subjective, cohabite dans ce type d'exemples. Le mot « probable » renvoie alors aux notions de croyance, de confiance, de crédibilité ou d'indice (cf. [Annexe 4](#)).

Temps 2 – Mise en activité des élèves

La **trace écrite de la séance 1** est accessible aux élèves.

Après avoir rappelé le vocabulaire appris dans la séance précédente, le professeur présente successivement trois cartes (en les vidéoprojetant ou avec des reproductions agrandies) qui représentent des contenus de bouteilles (cf. **Annexe 2-C**).

Il rappelle l'expérience et demande de qualifier la probabilité de l'évènement qui est écrit en haut à l'aide des mots « impossible », « certain » ou « une chance sur deux ». Les élèves écrivent leur réponse sur l'ardoise qu'ils présentent à l'enseignant à son signal.

Un élève est ensuite invité à apporter une justification orale qui s'appuie sur le contenu de la bouteille (« obtenir une bille bleue, c'est impossible car il n'y a pas de bille bleue », « il y a une chance sur deux d'obtenir une bille verte, car la moitié des billes sont vertes », etc.).

Le professeur présente ensuite une ou deux cartes sur lesquelles est écrit un évènement en lien avec la vie quotidienne comme « Naître un 30 février. » (cf. **Annexe 2-A**).

C'est impossible et la justification porte sur le fait qu'il n'y a jamais eu de 30 février. De même, l'évènement « Choisir un élève au hasard dans la classe et tomber sur quelqu'un né après l'année 2000. » est certain car tous les élèves de la classe sont nés après cette date.

Temps 3 – Retour réflexif

La **trace écrite de la séance 1** est enrichie avec quelques nouveaux exemples abordés en les justifiant à l'oral.

Pour aller plus loin

Pour un évènement et une probabilité donnée, les élèves doivent colorier une urne correspondante (voir **Annexe 2-D**).

Présentation synthétique des séances 4 et 6

Pour la séance 4, des évènements dont la probabilité est « peu probable », « probable » ou « une chance sur deux » sont proposés. Pour les évènements de la vie quotidienne, la probabilité d'un évènement est justifiée par sa fréquence de réalisation. Par exemple la qualification de l'évènement « voir un arc-en-ciel après la pluie » est « probable » car cela arrive souvent.

Pour la séance 6, des évènements qui concernent le lancer d'un dé équilibré à 6 faces (cf. **Annexe 2-B**) sont **ajoutés**, dont la probabilité est « impossible », « peu probable », égale à « une chance sur deux », « probable », « certain ». Les élèves placent ces probabilités sur une échelle (cf. **Annexe 3**).

Différenciation - remédiation

En cas de difficulté lors des séances 2 et 4, le professeur peut dans un premier temps aider les élèves à distinguer les évènements impossibles des évènements possibles, avant d'aborder la distinction peu probable / probable.

Présentation synthétique de la séance 3 – Introduction des mots « peu probable » et « probable »

Sur un principe analogue à la séance 1, les élèves expérimentent pour trouver le contenu de deux nouvelles bouteilles : 1 bille verte et 3 billes jaunes, 3 billes vertes et 1 bille jaune.

Objectif

Enrichir le vocabulaire avec les mots « peu probable », « probable » pour estimer des probabilités.

Matériel

Des bouteilles similaires à celles de la séance 1, qui contiennent cette fois plus de billes d'une couleur.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

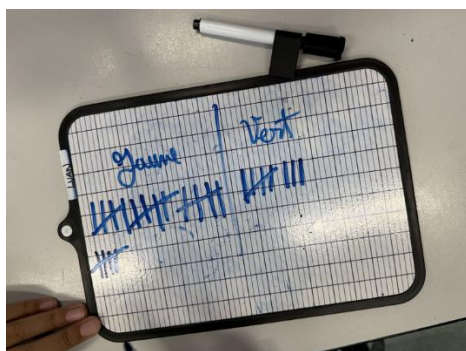
Présentation et recherche du contenu des bouteilles.

Le professeur énonce : « J'ai deux nouvelles bouteilles : la bouteille E et la bouteille F. Dans chaque bouteille, j'ai mis 4 billes. Les billes sont soit jaunes, soit vertes. Vous allez devoir dire ce que contient chacune de ces bouteilles sans les ouvrir uniquement en les retournant et en notant à chaque fois le résultat. »

Temps 2 – Mise en activité des élèves

En groupes : recherche du contenu des bouteilles par expérimentation.

Les élèves émettent des hypothèses quant au contenu des bouteilles puis l'enseignant réalise le dévoilement du contenu.



bouteille E.

verte	jaune
3	6
11	31
5	13

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif

L'attention est attirée sur l'évènement « obtenir une bille verte ».

L'objectif est cette fois d'arriver à dire :

- c'est peu probable si l'on choisit une bille au hasard avec la bouteille E ;
- c'est probable avec la bouteille F.

Point d'attention

Il s'agit d'estimations de probabilités :

- « peu probable » signifie moins d'une chance sur deux, mais pas impossible ;
- « probable », plus d'une chance sur deux, mais pas certain.

Peu utilisé par les élèves, le mot « probable » pourra être approché par des formulations plus communes. Par exemple, des expressions comme « c'est facile d'obtenir une bille verte » ou « Il y a plus de chances d'obtenir une bille verte » seront reformulées en « Il est probable d'obtenir une bille verte ».

Certains élèves rentreront peut-être dans une démarche de quantification, de mesure exacte en exprimant des probabilités sous la forme « 3 chances sur 4 ». Ces réponses seront validées et seront sujets d'apprentissage au CM2.

Trace écrite possible :



Présentation synthétique de la séance 4

Pour la séance 4, des évènements dont la probabilité est « peu probable », « probable » ou « une chance sur deux » sont proposés. Pour les évènements de la vie quotidienne, la probabilité d'un évènement est justifiée par sa fréquence de réalisation. Par exemple la qualification de l'évènement « voir un arc-en-ciel après la pluie » est « probable » car cela arrive souvent.

Focus sur la séance 5 – Positionner des évènements sur une échelle de probabilités

À travers un jeu de cartes utilisant un dé à 6 faces, les élèves constatent que le jeu n'est pas équitable et ordonnent des probabilités sur une représentation en forme d'échelle (cf. **Annexe 3**). L'objectif est d'ordonner les mots « impossible », « peu probable », « une chance sur deux », « probable », « certain », dans cet ordre.

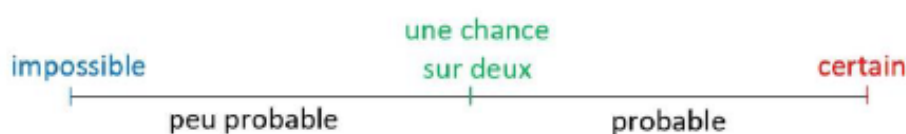


Figure 1 : Image extraite des exemples pour la mise en œuvre des programmes CM1.

Au collège, cette échelle sera bornée entre 0 et 1 et les nombres exprimant des probabilités y seront placés.

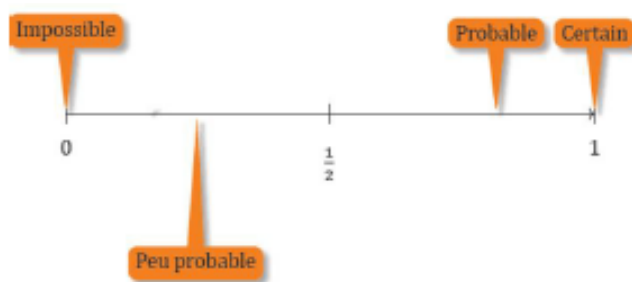


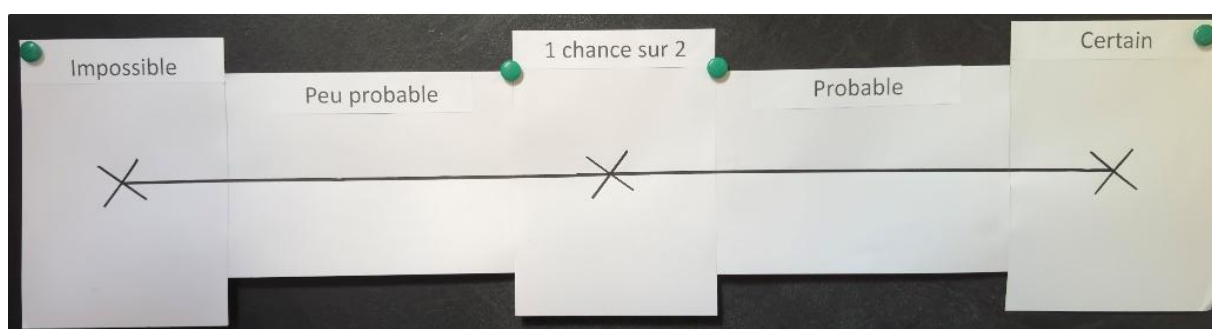
Figure 2 : Image extraite des exemples pour la mise en œuvre des programmes 6^e.

Objectif

Utiliser une représentation pour classer, dans un premier temps, puis ordonner des événements selon leur probabilité.

Matériel

- Dés à 6 faces.
- Cartes événements (cf. **Annexe 2-B**) et échelle des probabilités (cf. **Annexe 3**) à imprimer.
- Échelle des probabilités, constituée de 5 feuilles A4 :



Le jeu se joue à 2. Chaque joueur dispose d'un paquet de cartes (A ou B) constitué par l'enseignant sur lesquelles sont écrits des événements en lien avec le lancer d'un dé. Chaque élève retourne la première carte de son paquet. Le dé est lancé. Si l'évènement de sa carte se réalise, elle est retirée du jeu, sinon l'élève la replace sous son paquet. Le jeu se poursuit en prenant de nouveau une carte dans chaque paquet et en lançant le dé. Le gagnant de chaque binôme est le premier à ne plus avoir de cartes.

L'un des joueurs est nettement avantagé par la composition de son paquet (paquet A) qui contient des événements plus probables que ceux contenus dans le paquet de l'autre joueur.

Exemple de composition avec 4 cartes :

Paquet A	Paquet B
• obtenir un nombre pair ; • obtenir un nombre supérieur à 1 (c'est-à-dire 2, 3, 4, 5 ou 6) ; • obtenir un nombre différent de 4 ; • obtenir un nombre inférieur à 7 (événement certain).	• obtenir un nombre inférieur à 3 (c'est-à-dire 1 ou 2) ; • obtenir un nombre supérieur à 5 (c'est-à-dire 6) ; • obtenir 3 ; • obtenir un nombre impair supérieur à 3 (c'est-à-dire 5).

D'autres compositions avec plus de cartes sont possibles en utilisant d'autres cartes de l'annexe 2-B.

L'enseignant s'assure, par les compositions proposées, qu'il est très peu probable pour le joueur B de gagner même pour des parties ayant peu de tours (mais ce n'est pas impossible). L'objectif est que les élèves perçoivent que le jeu n'est pas « équitable », en l'exprimant ensuite par les probabilités.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite des élèves

Collectif (5 min) : Présentation du jeu

Les règles du jeu sont explicitées et quelques tours fictifs sont joués.

Temps 2 – Mise en activité des élèves

En binômes (15 min) : Expérimentation

Les paquets sont distribués, les binômes jouent et déterminent un vainqueur. Il est possible de faire plusieurs parties.

Mise en commun (15 min) : Le jeu n'est pas équitable

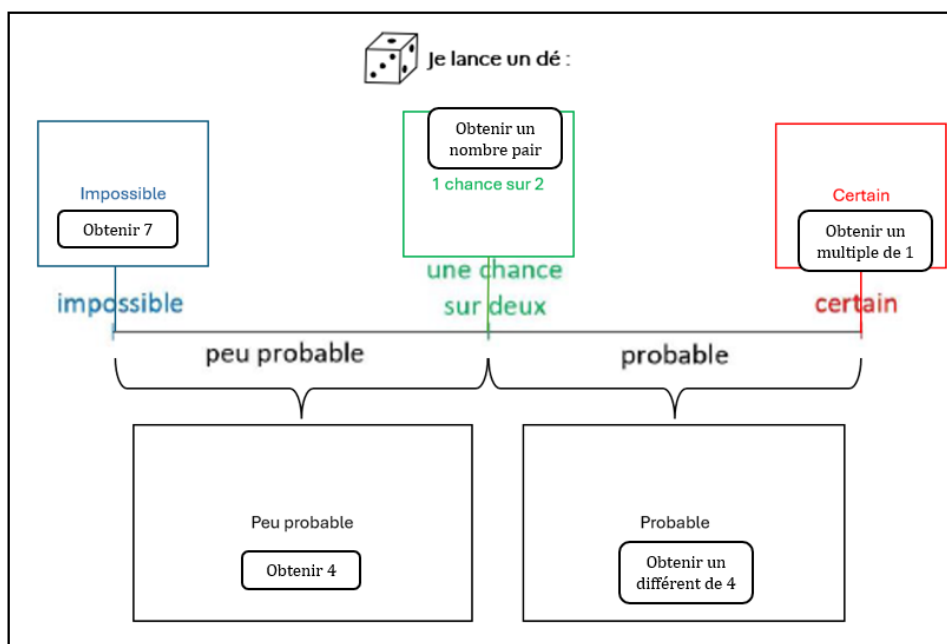
Discussion sur les résultats obtenus. Les élèves gagnants sont en très grande majorité, voire toujours, ceux qui ont le paquet A. En exhibant quelques cartes et en justifiant leur probabilité, les événements correspondants sont notés au tableau et organisés par probabilité croissante, de gauche à droite. L'échelle est affichée ou peut être dessinée.

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif

En collectif (10 min) : Classement des probabilités

L'échelle des probabilités est distribuée aux élèves qui peuvent alors y placer des cartes ou écrire dans la bonne zone.

Trace écrite possible :



Ce jeu est aussi l'occasion de s'intéresser plus explicitement aux issues qui composent chacun des évènements. Cette tâche permettra au collège, puis au lycée, de déterminer des probabilités en calculant le rapport entre le nombre d'issues qui réalisent un évènement et le nombre total d'issues.

Différenciation

Les évènements sont plus ou moins faciles à décrire en termes d'issues. En cas de difficulté, leur nombre sera restreint (par exemple s'intéresser d'abord à la distinction « peu probable » / « probable ») ou l'on choisira des cartes comportant des évènements simples à décrire.

Pour aller plus loin, l'enseignant pourra proposer aux élèves de rendre le jeu équitable en identifiant les évènements qui ont la même probabilité ou en les répartissant différemment.

Présentation synthétique de la séance 6

Pour la séance 6, des évènements qui concernent le lancer d'un dé équilibré à 6 faces (cf. **Annexe 2-B**) sont **ajoutés**, dont la probabilité est « impossible », « peu probable », égale à « une chance sur deux », « probable », « certain ». Les élèves placent ces probabilités sur une échelle (cf. **Annexe 3**).

Ressources (bibliographie, sitographie)

Briand, J. (2005). Une expérience statistique et une approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 247-282.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of mathematical behavior of children* n° 20, pp. 363-411.

Gauvrit, N., & Morsanyi, K. (2014). The equiprobability bias from a mathematical and psychological perspective. *Adv Cogn Psychol.*, 10(4), pp. 119-30.

Glammann, M. (1976). Les Probabilités à L'école Élémentaire. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 6, no. 4, 1976, pp. 389-93.

Martin, V., Thibault, M., & Theis, L. (2019). Enseigner les premiers concepts de probabilités : Un monde de possibilités ! Presses de l'Université du Québec.

Pichard, J.-F. (1998). Approche épistémologique et diverses conceptions de la probabilité. *Repères-IREM* n° 32.

Verdier, J. (2009). Le hasard au collège. *Bulletin APMEP* n° 484, pp. 615-626.